

## あるクラスの非ホロノミックシステムに対するリャプノフ制御<sup>†</sup>

浦久保 孝 光\*・土 屋 和 雄\*・辻 田 勝 吉\*

Lyapunov Control of a Class of Non-holonomic Systems<sup>†</sup>

Takateru URAKUBO\*, Kazuo TSUCHIYA\* and Katsuyoshi TSUJITA\*

In this paper, we deal with the control problem of a class of non-holonomic systems with  $m$  input variables. In the system, if the input vector fields and the first level of Lie brackets between them span the tangent space at each configuration, the system can move in every direction using the first level of Lie bracket motions and it is controllable. This class of systems is called as first order systems. We derive a time-invariant discontinuous state feedback law for the system based on the Lyapunov control: The input is designed so that the derivative of the Lyapunov function is composed of a symmetric and an asymmetric bilinear form in the gradient vectors of the Lyapunov function. In the controlled system, the desired point is the only stable equilibrium point. The performance of the controller is verified by numerical simulations.

**Key Words:** non-holonomic system, Lyapunov control, discontinuous state feedback law, first order systems

### 1. はじめに

力学系において速度変数に対する非可積分な拘束条件は非ホロノミックな拘束条件と呼ばれる。たとえば、二輪移動ロボットなどの車輪型移動ロボットにおいて、車輪が接地点において滑らないという条件は非ホロノミックな拘束条件である。一方、宇宙ロボットなどにおける角運動量保存則は運動の第一積分であるが、上述の意味では非ホロノミックな拘束条件と考えることができる。このような拘束条件によって、システムは局所的には運動の自由度を拘束されるが、大域的にはあらゆる状態への到達が可能であり可制御となる場合がある。このような非ホロノミックな拘束条件を持つシステムは非ホロノミックシステムと呼ばれ、近年、活発に研究がなされてきた<sup>1),2)</sup>。

非ホロノミックシステムはたとえ可制御であっても、滑らかたで時不変な状態フィードバック制御によって、目標点を漸近安定化することができないことが知られている<sup>3)</sup>。従来、特に2入力の Chained Form と呼ばれるシステムを対象として多くの研究がなされてきた。これまでに提案されてきたフィードバック制御則は2つに大別される。1つは時変なフィードバック則であり<sup>4),5)</sup>、1つは不連続なフィードバック則である<sup>6)~8)</sup>。

本研究では、一般の  $m$  入力を持つドリフト項のない対称アフィンシステムで表わされる非ホロノミックシステムのフィードバック制御による安定化を考える。そのうちで特に、First Order Systems と呼ばれるシステムを対象とする<sup>9)</sup>。このシステムは、入力に対応するベクトル場の一次の Lie 括弧積までを考えることで、可制御性が成り立つシステムであり、状態変数の数は  $m + mC_2$  までとなる。このようなクラスの非ホロノミックシステムに対して Lyapunov の方法を拡張することで、状態フィードバック制御により目標状態を漸近安定化する手法（拡張 Lyapunov 法）を提案する。この手法の有効性は、3 状態 2 入力の場合に限定して、文献 10) において筆者らによってすでに確認されている。非ホロノミックシステムでは Lyapunov 関数の負勾配方向の入力のみでは目標状態以外の平衡点にもシステムが安定化される。そこで、提案する手法では、Lyapunov 関数の値を変化させない方向の入力、すなわち、Lyapunov 関数の値が一定となる球面の接線方向の入力を考える。この入力はシステムに目標状態以外の平衡点を回避させる。よって、Lyapunov 関数の負勾配方向の入力とその接線方向の入力を組み合わせることで、システムを目標状態に漸近安定化することが可能となる。その結果得られる制御則は時不変な不連続状態フィードバック則となる。

以下、2 章では対象とするシステムの定式化を行ない、3 章では、このシステムに対して、目標点を漸近安定化する時不変不連続状態フィードバック則を構成する。また、制御されたシステムの安定平衡点が目標点のみとなることを解析により示す。4 章では、具体例として、入力変数の数が 2 および 3 の場合を考え、数値シミュレーションを行ない、設計さ

<sup>†</sup> 第 23 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (2000・11)

\* 京都大学工学研究科 京都市左京区吉田本町

\* Graduate School of Engineering, Kyoto University, Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto

(Received November 17, 2000)

(Revised June 27, 2001)

れた制御則の有効性を確認する。

## 2. 対象とするシステム

つぎのようなシステムを考える。

$$\dot{y}_i = u_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

$$\dot{x}_{ji} = y_j u_i \quad (i < j \leq m) \quad (2)$$

ここで、状態変数  $y_i$  は入力  $u_i$  により直接制御され、状態変数  $x_{ji}$  は変数  $y_j$  と  $u_i$  により制御される。このシステムは Murray らによって、First Order Systems として導入された<sup>9)</sup>。状態変数を

$$z = [y_1, \dots, y_m, x_{21}, x_{31}, x_{32}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mm-1}]^T \quad (3)$$

と表わし、入力変数を

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T \quad (4)$$

と表わせば、このシステムはつぎのように表現される。

$$\dot{z} = B u \quad (5)$$

ここで、

$$B = \begin{bmatrix} \overbrace{I_{m \times m}} & & & & \\ y_2 I_{1 \times 1} & 0 & \dots & & 0 \\ y_3 I_{2 \times 2} & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ y_m I_{m-1 \times m-1} & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

であり、 $I_{k \times k}$  は  $k \times k$  の単位行列である。入力  $u_i$  に対応するベクトル場を  $X_i$  とすると、

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j < i} y_j \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \quad (7)$$

となり、変数  $y_i$  は直接、入力  $u_i$  により制御される。また、ベクトル場  $X_i, X_j$  の Lie 括弧積  $[X_i, X_j]$  はつぎのように計算される。

$$[X_i, X_j] = -\frac{\partial}{\partial x_{ji}} \quad (8)$$

よって、この Lie 括弧積  $[X_i, X_j]$  によって、変数  $x_{ji}$  を制御できる。すなわち、対象とするシステムは入力に対応するベクトル場  $X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) と一次の Lie 括弧積  $[X_i, X_j]$  ( $i < j$ ) によって、状態空間の各点でその接空間を張ることができ可制御となる。

## 3. 制御系設計

### 3.1 制御則の構成

Lyapunov 関数の候補:

$$V(z) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m y_i^2 + \sum_{i < j} x_{ji}^2 \right) \quad (9)$$

を考え、つぎのように制御則を設計する。

$$u = \alpha u_s + \beta u_a \quad (10)$$

ここで、パラメータ  $\alpha, \beta$  は正の定数であり、

$$u_s = -IB^T \nabla V \quad (11)$$

$$u_a = -\sum_{i < j} \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji} B^T \nabla V \quad (12)$$

ただし、

$I$  :  $m \times m$  単位行列

$J_{ji}$  :  $i$  行  $j$  列,  $j$  行  $i$  列の要素がそれぞれ 1, -1 の  $m \times m$  反対称行列

$$(例) \quad J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & & | & 0 \end{bmatrix}$$

また、

$$g = |B^T \nabla V|, \quad (13)$$

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{mm-1}} \right]^T,$$

であり、 $B^T \nabla V$  はつぎのように計算される。

$$B^T \nabla V = \begin{bmatrix} y_1 + \sum_{j=2}^m y_j x_{j1} \\ y_2 + \sum_{j=3}^m y_j x_{j2} \\ \vdots \\ y_k + \sum_{j=k+1}^m y_j x_{jk} \\ \vdots \\ y_{m-1} + y_m x_{mm-1} \\ y_m \end{bmatrix} \quad (14)$$

入力  $u$  によるシステムの振舞の詳細は 3.2 に述べるが、 $u_s, u_a$  のそれぞれの項の特徴的な性質を簡潔にまとめておく。

1.  $u = u_s$  のとき

$$\dot{V} = -g^2 \leq 0 \quad (15)$$

これより、 $t \rightarrow \infty$  のとき

$$g \rightarrow 0 \iff y_1, y_2, \dots, y_m \rightarrow 0.$$

したがって、システムは  $y_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の  $m C_2$  次元の空間に漸近し、その空間上で停止する。

2.  $u = u_a$  のとき

$$\dot{V} = -\sum_{i < j} \frac{x_{ji}}{g^2} (B^T \nabla V)^T J_{ji} (B^T \nabla V) = 0 \quad (16)$$

これより、システムは  $V(z) = V_c = \text{const.}$  で表わされる球面上に拘束される。また、このとき、 $y_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) かつ  $V(z) = V_c$  の状態は不安定となり、システムは  $y_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の点から遠ざかる。

以上の考察から、制御入力  $u_s, u_a$  を組み合わせた制御入力 (10) により、システムは  $V(z) = V_c$  上を  $y_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の点を避けながら移動し、 $V_c$  が減少するに従い目標点である原点に収束すると考えられる。

### 3.2 制御された系の振舞

入力 (10) に対する基礎式 (5) はつぎようになる。

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i < j} \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji}) B^T \nabla V \quad (17)$$

このとき、関数  $V$  の時間微分はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(B^T \nabla V)^T (\alpha I + \beta \sum_{i < j} \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji}) B^T \nabla V \\ &= -\alpha |B^T \nabla V|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式より、(17) 式によって表わされるシステムは  $B^T \nabla V = 0$  によって表わされる平衡点に収束する。つぎにこの平衡点の安定性を調べる。まず、(17) 式を解析のためにつぎのように連続化する<sup>(注1)</sup>。

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i < j} \tanh(\frac{g^2}{\epsilon}) \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji}) B^T \nabla V \quad (19)$$

ここで、 $\epsilon$  は正の微小な定数である。(19) 式の平衡点は  $B^T \nabla V = 0$  の点であり、(14) 式より、つぎのように表わされる。

$$y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad x_{ji} = \bar{x}_{ji} \quad (i < j \leq m) \quad (20)$$

この平衡点近傍で (19) 式を線形化すると、つぎのような形になる。

$$\delta \dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i < j} \frac{\bar{x}_{ji}}{\epsilon} J_{ji}) \frac{\partial B^T \nabla V}{\partial z} \delta z \equiv A \delta z \quad (21)$$

(20) 式で表わされる平衡点の集合は  $m C_2$  次元の空間であるから、行列  $A$  の固有値のうち  $m C_2$  個は零固有値となる。よって、これら以外の  $m$  個の固有値が平衡点の安定性を決定し、これらに関しては次式が成り立つ。

$$\text{trace} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = -m\alpha + \sum_{i < j} \frac{\beta \bar{x}_{ji}^2}{\epsilon} \quad (22)$$

平衡点  $B^T \nabla V = 0$  が安定となるためには、すべての  $\lambda_i$  の実部が負または零でなければならない。そのための必要条件は (22) 式よりつぎのようになる。

$$\sum_{i < j} \bar{x}_{ji}^2 \leq \frac{m\alpha}{\beta} \epsilon \quad (23)$$

よって、安定平衡点は原点近傍の  $\epsilon$  に応じた微小な領域の外には存在しない。一方、原点 ( $\bar{x}_{ji} = 0$ ) においては、 $\lambda_i = -\alpha$  ( $i = 1, \dots, m$ ) となるため、原点は安定平衡点である。以上のことから、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすることにより、安定平衡点は原点のみとなり、原点以外の  $B^T \nabla V = 0$  上の点は不安定平衡点となる。よって、提案する制御系 (17) の安定平衡点は原点のみとなり、特異な初期値を持たない限りシステムは原点に収束する<sup>(注2)</sup>。

(注1) 連続なシステム (19) の右辺は、 $B^T \nabla V = 0$  の  $\sqrt{\epsilon}$  近傍を除く領域では不連続なシステム (17) の右辺に一樣に収束する。よって、 $B^T \nabla V = 0$  の  $\sqrt{\epsilon}$  近傍を経由しない解軌道については、連続なシステム (19) の振舞は不連続なシステム (17) の振舞を十分に近似している。

(注2) 不安定平衡点の構造によっては、 $B^T \nabla V = 0$  の不安定平衡点上以外にも収束を保証しない初期値がある。たとえば、不安定平衡点の安定多様体が存在し、その上に初期値がある場合、原点への収束は保証されない。しかし、微小な外乱の存在を考えれば、このような特異点は回避される。

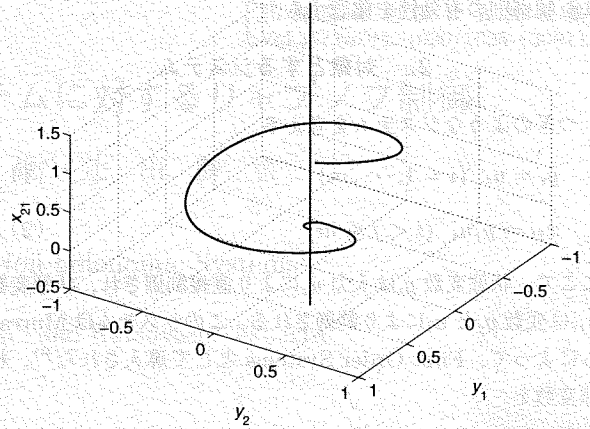


Fig. 1 Behavior of the state variables  $z$

#### 4. 適用例

前章で得られた制御則によってシステムは原点に収束するが、原点近傍でのシステムの振舞および収束性については適用するシステムの具体的な構造に依存する。よって、本章では、提案する制御則を  $m = 2, 3$  の場合に適用し、その振舞を調べ、制御則の調整を行なう。設計された制御系の有効性は数値シミュレーションによって確認される。

##### 4.1 $m = 2$ の場合<sup>10)</sup>

$m = 2$  の場合、状態変数は最大3となる。このような力学系としては、二輪移動ロボット、2個のホイールで姿勢制御を行なう人工衛星などがある。この種のシステムは Chained Form に変換され、Chained Form に基づく一般的な制御則で制御系を構成できるが、ここでは、本論文で提案する方法によって制御系を設計する。つぎのようなシステムを考える。

$$\dot{z} = Bu \quad (24)$$

$$z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_{21} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Lyapunov 関数の候補：

$$V(z) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_{21}^2) \quad (26)$$

を用いて、制御則は具体的につぎのようになる。

$$u = -(\alpha I + \beta \frac{x_{21}}{g^2} J_{21}) B^T \nabla V \quad (27)$$

このとき、基礎方程式は

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \frac{x_{21}}{g^2} J_{21}) B^T \nabla V \quad (28)$$

となる。(28) 式をもとに  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 5.0$  とし、初期値を  $[y_1, y_2, x_{21}] = [0.1, 0.1, 1.0]$  として、数値シミュレーションを行なった。

Fig. 1 は状態変数  $z$  の軌跡を示している。システムは初期状態で平衡点  $B^T \nabla V = 0$  の近傍にあるが、入力  $u_a$  の効果ですみやかに平衡点  $B^T \nabla V = 0$  から遠ざかり、その後原点に

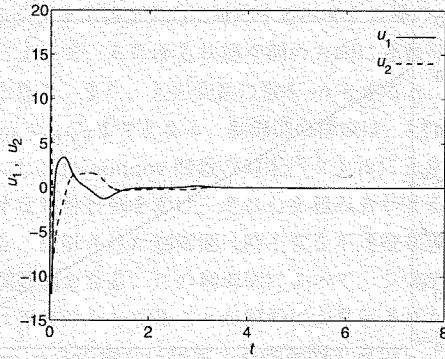


Fig. 2 Time histories of the input variables  $u_1$  and  $u_2$

収束している。また、Fig. 2に示すように、この場合入力も滑らかに0に収束する。原点近傍での振舞は近似的に解析でき、変数  $x_{21}$ ,  $g (\approx \sqrt{y_1^2 + y_2^2})$  に関してつぎのような結果を得る。

(i)  $g^2 < O(|x_{21}|)$  のとき

この領域では、基礎方程式 (28) より、 $|\dot{x}_{21}|, |\dot{g}| \ll |\dot{y}_1|, |\dot{y}_2|$  が成立し、さらに、変数  $y_1, y_2$  に関しては微小項を無視することで、次式が成り立つ。

$$\dot{y}_1 = -\beta \frac{x_{21}}{g^2} y_2 \quad (29)$$

$$\dot{y}_2 = \beta \frac{x_{21}}{g^2} y_1$$

よって、変数  $y_1, y_2$  は半径  $g$  の円運動を行なう。この円運動の周期で平均化し高次の微小項を無視すれば、変数  $x_{21}, g$  は次式のように時間変化する。

$$\dot{x}_{21} = -\frac{\beta}{2} x_{21} \quad (30)$$

$$\dot{g} = -\alpha g + \frac{\beta x_{21}^2}{2g} \quad (31)$$

(30)(31) 式より、変数  $x_{21}, g$  に対するつぎの近似解を得る。

$$x_{21} = C_1 e^{-\frac{\beta}{2}t} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \beta \neq 2\alpha : g = \sqrt{C_2 e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha - \beta} C_1^2 e^{-\beta t}} \\ \beta = 2\alpha : g = \sqrt{(\beta C_1^2 t + C_2) e^{-2\alpha t}} \end{cases} \quad (33)$$

ここで、 $C_1, C_2$  は定数である。

(ii)  $g^2 \geq O(|x_{21}|)$  のとき

この領域では、微小項を無視すれば、変数  $g$  に関して次式が成り立つ。

$$\dot{g} = -\alpha g \quad (34)$$

したがって、変数  $x_{21}, g$  に関してつぎの結果が従う。

$$g = C_3 e^{-\alpha t}, |x_{21}| \leq O(e^{-2\alpha t}) \quad (35)$$

ここで、 $C_3$  は定数である。

とくに、 $\beta > 4\alpha$  のとき、(32), (33) 式の近似解より (i) の領域にあるすべての状態は (ii) の領域に向かう。さらに、システムは自律系であるので、状態は (ii) の領域において原点

に収束する。このとき、(27) 式の入力変数もまた指数的に0に収束する。

#### 4.2 $m = 3$ の場合

$m = 3$  の場合、基礎方程式 (5) によると状態変数の数は6以下である。このような力学系の例としてはあるクラスの宇宙ロボットの姿勢制御問題が考えられる。ここではつぎのような状態変数の数が6のシステムを考える。

$$\dot{z} = B u \quad (36)$$

$$z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y_2 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Lyapunov 関数の候補：

$$V(z) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2) \quad (38)$$

を用いて、制御則は具体的につぎのようになる。

$$u = -(\alpha I + \frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31} + \frac{\beta x_{32}}{g^2} J_{32}) B^T \nabla V \quad (39)$$

このとき、基礎方程式は

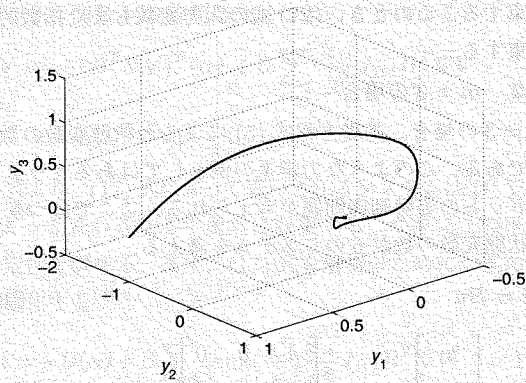
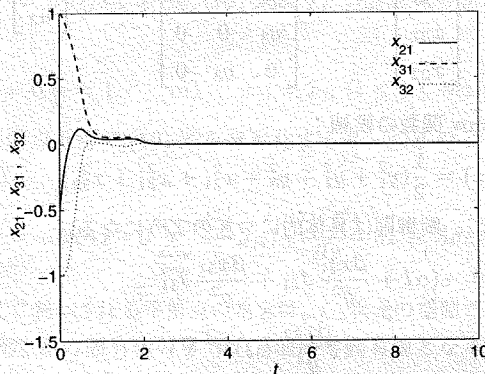
$$\dot{z} = -B(\alpha I + \frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31} + \frac{\beta x_{32}}{g^2} J_{32}) B^T \nabla V \quad (40)$$

となる。(40) 式で表わされる制御系においては、原点のみが安定平衡点であり、状態変数  $z$  は0に収束する。しかしながら、いかなるパラメータ  $\alpha, \beta > 0$  の組み合わせに対しても、その振舞は原点近傍での状態変数  $y_i$  における激しい振動を伴う。このとき、入力変数  $u_i$  は一定の振幅で振動し、その周波数は増大していく。このような制御系の振舞は実用的には不適切である。この振動の原因としては、反対称行列  $\sum_{i < j} (\beta x_{ji} / g^2) J_{ji}$  が零固有値を持っていることが挙げられる。これにより、状態によっては、対称行列に対する反対称行列の効果をパラメータ  $\alpha, \beta$  を用いて調節することが不能になり、4.1におけるような振舞を得ることができない。このことは、解析および数値シミュレーションによって確認されている。よって、このような振動を抑えるために制御則をつぎのように修正する。

$$u = -[(\alpha I + \frac{\gamma}{V^{\frac{1}{4}}} e_n e_n^T) + (\frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31} + \frac{\beta x_{32}}{g^2} J_{32})] B^T \nabla V \quad (41)$$

ここで、 $e_n$  は反対称行列  $\sum_{i < j} (\beta x_{ji} / g^2) J_{ji}$  の零固有値に対応する固有ベクトルであり、

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2}} [x_{32}, -x_{31}, x_{21}]^T \quad (42)$$

Fig. 3 Behavior of the state variables  $y_1$ ,  $y_2$  and  $y_3$ Fig. 4 Time histories of the state variables  $x_{21}$ ,  $x_{31}$  and  $x_{32}$ 

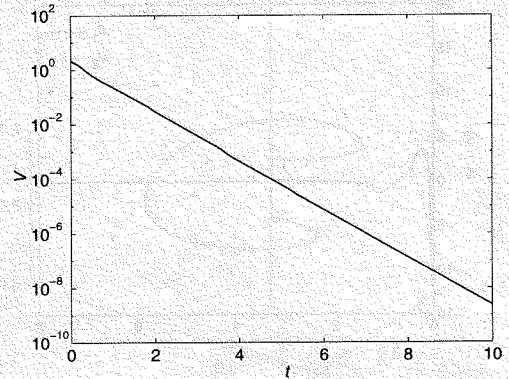
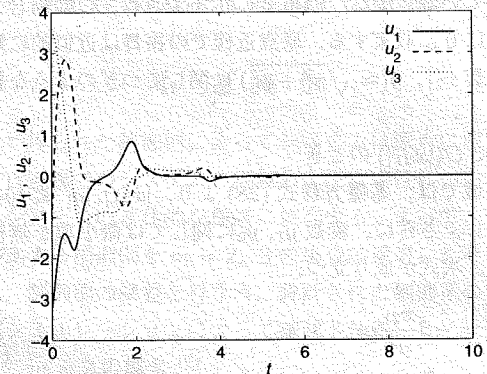
と表わされる。また、 $\gamma$  は正の定数パラメータである。この制御則の修正により、状態は反対称行列  $\sum_{i < j} (\beta x_{ji}/g^2) J_{ji}$  の零でない固有値の固有空間に近似的に制限されることとなり、パラメータ  $\alpha$ ,  $\beta$  により振舞いを決定できる。また、この制御則の修正は正定な対称行列の修正であり、拡張 Lyapunov 法の枠組みのなかにおける修正である<sup>(注3)</sup>。このとき、基礎方程式は

$$\dot{z} = -B[(\alpha I + \frac{\gamma}{V^{\frac{1}{4}}} e_n e_n^T) + (\frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31} + \frac{\beta x_{32}}{g^2} J_{32})] B^T \nabla V \quad (43)$$

となる。

(43) 式をもとに数値シミュレーションを行なった結果を Figs. 3~6 に示す。初期値は  $[y_1, y_2, y_3, x_{21}, x_{31}, x_{32}] = [1.0, -1.0, 0.0, -0.5, 1.0, -1.0]$  であり、パラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\alpha = 1.0, \beta = 5.0, \gamma = 5.0$  とした。Fig. 3 に示すように、状態変数  $y_i$  は振動することなく原点に収束している。また、このとき、状態変数  $x_{21}, x_{31}, x_{32}$  は Fig. 4 に示すように 0 に収束している。原点近傍での振舞いは  $m = 2$  の場合と同様に近似的に解析でき、変数  $X = \sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2}$ ,

(注3) 一般の  $m$  入力の場合も、反対称行列  $\sum_{i < j} (\beta x_{ji}/g^2) J_{ji}$  の零固有値が存在すれば、同様の修正が必要となると考えられるが、修正則の一般形はまだ得られていない。

Fig. 5 Time history of the Lyapunov function  $V$ Fig. 6 Time histories of the input variables  $u_1$ ,  $u_2$  and  $u_3$ 

$g(\approx \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2})$  に関してつぎのように表わされる。

(i)  $g^2 < O(X)$  のとき

$$X = C_4 e^{-\frac{\beta}{2} t} \quad (44)$$

$$\begin{cases} \beta \neq 2\alpha : g = \sqrt{C_5 e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha - \beta} C_4^2 e^{-\beta t}} \\ \beta = 2\alpha : g = \sqrt{(\beta C_4^2 t + C_5) e^{-2\alpha t}} \end{cases} \quad (45)$$

(ii)  $g^2 \geq O(X)$  のとき

$$g = C_6 e^{-\alpha t}, \quad X \leq O(e^{-2\alpha t}) \quad (46)$$

ここで、 $C_4, C_5, C_6$  は定数である。とくに、 $\beta > 4\alpha$  のとき、(i) の領域にある状態は (ii) の領域に向かい、状態変数、入力変数とも指数的に 0 に収束する。

以上における制御則の構成法は、(36) 式において状態変数  $x_{ji}$  のうちのいくつかを除いた場合でも同様に行なうことができる。たとえば、状態変数  $x_{32}$  を除いた状態変数の数が 5 のシステムは水中ロボットを表わすとされ研究がなされているが<sup>7)</sup>、このシステムに対しても (41) 式と同様の制御則が構成され、同様の結果が得られる。

## 5. まとめ

本論文では First Order Systems と呼ばれる非ホロノミックシステムに対する時不変不連続状態フィードバック則を Lyapunov 法を拡張することで構成する手法を提案した。対

象とするシステムは、入力に対応するベクトル場の一次の Lie 括弧積によって、あらゆる状態空間の方向に運動可能であり可制御となる。また、入力変数の数を  $m$  とすると、状態変数の数は  $m + mC_2$  までとなる。制御則の構成は、Lyapunov 法をもとにし、Lyapunov 関数の勾配ベクトルに正定な対称行列および反対称行列をかけ、それらを組み合わせることで行なわれる。設計された制御則は時不変な不連続状態フィードバック制御則となる。この制御則によって、システムの安定平衡点は原点のみとなることが解析により示された。 $m = 2$  および  $m = 3$  の場合に提案する制御則を適用し、提案する制御則の有効性を解析および数値シミュレーションによって確認した。

最後に、本論文をまとめるに当たり有益な御討論を頂いた京都大学大学院情報学研究科の藤本健治助手に深く感謝いたします。

#### 参 考 文 献

- 1) 中村仁彦: 非ホロノミックロボットシステム, 日本ロボット学会誌, **11-4** ~ **12-2** (1993~1994)
- 2) 三平満司: 非ホロノミック系のフィードバック制御, 計測と制御, **36-6**, 396/403 (1997)
- 3) R. W. Brockett: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, Differential Geometric Control Theory, edited by R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussman, 181/191, Birkhäuser, Boston (1983)
- 4) C. Samson: Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots, IEEE Transactions on Automatic Control, **40-1**, 64/77 (1995)
- 5) J.-B. Pomet: Explicit Design of Time-varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems without Drift, System & Control Letters, **18-2**, 147/158 (1992)
- 6) A. Astolfi: Discontinuous Control of Nonholonomic Systems, System & Control Letters, **27-1**, 37/45 (1996)
- 7) H. Khenouf and C. Canudas de Wit: Quasi-continuous Exponential Stabilizers for Nonholonomic Systems, Proceedings of IFAC 13th World Congress, San Francisco, USA, 2b-174 (1996)
- 8) 成清, 杉田: Chained Form で記述された非ホロノミック系の指数安定化, 計測自動制御学会論文集, **32-8**, 1310/1312 (1996)
- 9) R. M. Murray and S. S. Sastry: Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids, IEEE Transactions on Automatic Control, **38-5**, 700/716 (1993)
- 10) K. Tsuchiya, T. Urakubo and K. Tsujita: Motion Control of a Non-holonomic System Based on the Lyapunov Control Method, to appear in Journal of Guidance, Control, and Dynamics (2002年発行予定)

#### 土 屋 和 雄 (正会員)



1943年8月9日生。66年京都大学工学部航空工学科卒。68年同大学院工学研究科修士課程修了。同年三菱電機(株)入社。中央研究所勤務。90年大阪大学工学部電子制御機械工学科教授。95年京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻教授。宇宙工学、非線形システム論に関する研究に従事。工学博士。AIAA, システム制御情報学会などの会員。

#### 辻 田 勝 吉 (正会員)



1967年1月26日生。93年大阪大学工学研究科電子制御機械工学専攻修士課程修了。同年同大学工学部電子制御機械工学科助手。96年より京都大学工学研究科航空宇宙工学専攻助手。現在に至る。歩行ロボットの自律的歩行制御、柔軟リンクを持つマニピュレータの運動制御などの研究に従事。日本機械学会, 日本ロボット学会, システム制御情報学会などの会員。

#### [ 著 者 紹 介 ]

#### 浦久保 孝 光 (学生会員)



1973年7月19日生。96年京都大学工学部航空工学科卒業。98年同大学院工学研究科航空宇宙工学専攻修士課程修了。2001年同博士後期課程研究指導認定退学(博士(工学))。同年神戸大学工学部情報知能工学科助手。現在に至る。非ホロノミックシステムの運動制御に関する研究に従事。