

力学系を用いた非線形最適化問題の近似解法

土屋和雄, ○西山岳宏, 辻田勝吉

京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻

An Algorithm for a Nonlinear Optimization Problem by the use of a Dynamic System

Kazuo Tsuchiya, ○Takehiro Nishiyama, Katsuyoshi tsujita

Dept. of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Abstract: This paper deals with an approximation algorithm for a nonlinear optimization problem by the use of a dynamic system. The problem is to find a minimum of a multivariate function in which each variable has a bounded feasible region, and the objective function is expressed as a sum of the products of functions of each variable. The feasible region of each variable is discretized and expressed as a set of nodes, and the feasible region of the problem is expressed as a set of combinations of the nodes, i.e. lattice points. Dynamic elements are put at each node, and a dynamic system is constructed with the elements. If one element of each variable is equal to 1 and others are zero, the state of the system corresponds to a lattice point. The interactions between the elements are constructed so that states corresponding to lattice points are steady states, and the states become stable in order of the corresponding value of the objective function when a parameter included in the interactions is increased. The algorithm is applied to the function of Fletcher & Powell and its performance is verified.

1 はじめに

非線形連続関数最適化問題の解法としては、これまで、準ニュートン法をはじめとした局所探索アルゴリズムが広く研究されている¹⁾。これらの手法においては、目的関数の局所最適解を求めることを目的とし、大域的最適解、あるいは大域的な近似最適解への収束性は保証されない。そのため、局所最適解を多く持つ、多峰性の関数に適用すると、大域的最適解が得られないどころか、解の性能はかなり悪いものとなる可能性もある。

大域的最適解を求めることを目的とした(近似)解法には、分枝限定法などの決定論的手法と、シミュレーテッドアニーリングなどの確率論的手法がある²⁾。いずれの手法においても、問題の次元が大きくなると計算時間が増大し、(近似)最適解を得ることが困難となる。

一方で、力学系を用いた最適化手法として、組合せ最適化問題に対する人工ニューラルネットワークモデルと呼ばれる手法がある^{3, 4)}。このモデルにおいては、力学系の安定平衡解として、組合せ最適化問題の近似解が得られる。我々は、レプリケータ方程式⁵⁾を用いた組合せ最適化問題の近似解法を提案している^{6, 7)}。本研究では、連続関数最適化問題に対して、本手法を適用することを考える。問題としては、各変数が有界な許容領域を持つ多変数連続関数の最小値探索を取り上げる。目的関数は各変数の関数の積の和で与えられるものとする。各変数の許容領域を離散化し、節点の集合で表わし、目的関数の許容領域を節点の組み合わせ、すなわち格子点の集合で表わす。各節点上に0から1までの値をとる動的素子を配置し、それらを状態変数とする力学系を構成する。

各変数に属する動的素子の内、一つが1で他が0である状態は、一つの格子点に対応する。素子間の相互作用を次の条件が満たされるよう、適切に設定する。(i) 格子点に対応する状態が定常解となる。(ii) 相互作用に含まれるパラメータを徐々に大きくするとき、目的関数値の小さい格子点に対応する解から逐次的に安定化する。これにより、パラメータを徐々に変化させる、決定論的アニーリングの適用が可能となる。本研究では、決定論的アニーリングと、制約を持つ連続関数に対する局所探索アルゴリズムである逐次2次計画法¹⁾を組合せたアルゴリズムを提案する。そして、大域的最適解を求めることが比較的困難とされる、Fletcher & Powellの関数⁸⁾に適用し、その有効性を検証する。

以下、第2章において、連続関数最適化問題を離散最適化問題として定式化する。そして、第3章において、力学系の構成とその平衡解の安定条件について述べる。さらに、第4章において決定論的アニーリングアルゴリズムの提案を行い、その性能を数値的に検証する。最後に第5章において結論と今後の課題について述べる。

2 問題の定式化

次のような、矩形の許容領域を持つ N 変数連続関数最適化問題を考える。

$$\min_x L(x_1, \dots, x_N), \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (1)$$

ここで、目的関数 L は、次のように1変数関数の積の和の形に表わされるものを対象とする。

$$L(x_1, \dots, x_N) = \sum_{m=1}^M L_1^{(m)}(x_1) \cdots L_N^{(m)}(x_N) \quad (2)$$

この問題を離散最適化問題として定式化する．まず，各変数 x_i を K 個の節点に離散化し，変数 x_i の j 番目の節点での値を x_{ij} とする ($x_{i1} = x_i^L, x_{iK} = x_i^U$)．各節点 x_{ij} に動的素子 u_{ij} を対応させ， u_{ij} を用いて次の関数 $J(u)$ を構成する．

$$J(u) = \sum_{j_1=1}^K \cdots \sum_{j_N=1}^K u_{1j_1}^2 \cdots u_{Nj_N}^2 L(x_{1j_1}, \cdots, x_{Nj_N})$$

$$= \sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^N \left[\sum_{j_i=1}^K u_{ij_i}^2 L_{ij_i}^{(m)} \right] \quad (3)$$

ここで，

$$L_{ij_i}^{(m)} = L_i^{(m)}(x_{ij_i}) \quad (4)$$

これは，各変数に属する素子の内，一つが $u_{ij}^2 = 1$ で他が 0 であるとき，すなわち

$$u_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & (j = j(i)) \\ 0 & (j \neq j(i)) \end{cases} \quad (\forall i) \quad (5)$$

が満たされるとき，目的関数値 $L(x_{1j(1)}, \cdots, x_{Nj(N)})$ に一致する．すなわち，状態 (5) は格子点 $(x_{1j(1)}, \cdots, x_{Nj(N)})$ に 1 対 1 に対応する (図 1)．

次節において動的素子 u_{ij} ($i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, K$) に対する力学系を構成し，格子点に対応する平衡解 (許容解) がその目的関数値の小さいものから順に逐次的に分岐し，安定化することを示す．

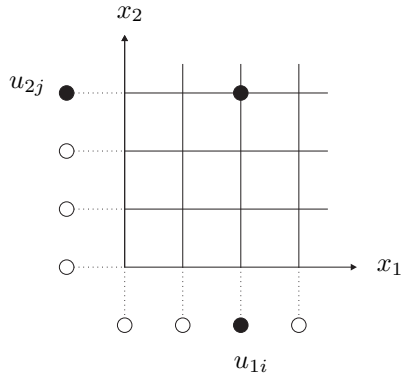


図 1 問題の定式化 ($u_{1i}^2 = 1, u_{2j}^2 = 1$ のとき，格子点 (x_{1i}, x_{2j}) が解として得られる)．

3 力学系の構成と平衡解の安定性

3.1 力学系の構成

$N \times K$ の状態変数 u_{ij} に対して，力学系を次のように構成する．

$$\dot{u}_{ij} = (f_{ij} - g_i)u_{ij} \quad (6)$$

ここで，

$$f_{ij} = (1 - u_{ij}^2) - \alpha_0 \sum_{j' \neq j} u_{ij'}^2$$

$$- \alpha_1 \sum_{m=1}^M \prod_{i' \neq i} \left[\sum_{j'=1}^K u_{i'j'}^2 L_{i'j'}^{(m)} \right] L_{ij}^{(m)} \quad (7)$$

$$g_i = \sum_j f_{ij} u_{ij}^2 \quad (8)$$

であり， $\alpha_0 > 0, 0 \leq \alpha_1 \ll 1$ はパラメータである． f_{ij} の第 1 項は，全ての素子を $u_{ij}^2 = 1$ へと導く効果を表わし，第 2 項は同じ添字 i を持つ素子間，すなわち同一の変数 x_i に属する素子間の競合の効果を表わす．また， f_{ij} の第 3 項は $J(u)$ の勾配

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(u)}{\partial u_{ij}} = \sum_{m=1}^M \prod_{i' \neq i} \left[\sum_{j'=1}^K u_{i'j'}^2 L_{i'j'}^{(m)} \right] L_{ij}^{(m)} u_{ij} \quad (9)$$

から導かれており，目的関数値の大きい解の出現を抑制する効果を表わす．

また，

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_j u_{ij}^2 = \sum_j (f_{ij} - g_i) u_{ij}^2$$

$$= \left(1 - \sum_j u_{ij}^2 \right) g_i \quad (\forall i) \quad (10)$$

より，初期に $\sum_j u_{ij}^2 = 1$ であれば常に

$$\sum_j u_{ij}^2 \equiv 1 \quad (\forall i) \quad (11)$$

が成立する．

3.2 力学系の平衡解と近似最適解

力学系 (6) の平衡解は，次のように分類される．

$$\begin{cases} \text{一様解: } u_{ij}^2 \neq 0 \quad (\forall i, j) \\ \text{許容解: } u_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & (j = j(i)) \\ 0 & (j \neq j(i)) \end{cases} \quad (\forall i) \\ \text{遷移解: その他} \end{cases} \quad (12)$$

一様解，許容解は次のような意味を持つ．

- 一様解：一様解において，

$$\begin{cases} u_{ij}^2 \rightarrow 1 & u_{ij}^2 = \max_j u_{ij}^2 \text{ のとき} \\ u_{ij}^2 \rightarrow 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (\forall i) \quad (13)$$

とすると，一様解は目的関数 L にある近似をしたときの最適解に対応することが示される．

- 許容解：それぞれが格子点 $(x_{1j(1)}, \cdots, x_{Nj(N)})$ に対応し，このとき $J(u)$ は格子点での目的関数値 $L(x_{1j(1)}, \cdots, x_{Nj(N)})$ に一致する．そして，許容解は対応する目的関数値の小さいものから順に逐次的に安定化することが示される．

3.3 一樣解

α_1 が小さいとき，一樣解は第 0 近似として，次のように求められる．

$$u_{ij}^2 = \frac{1}{K} \quad (14)$$

これは $\alpha_1 = 0$ のときは，厳密に成り立つ．また，第 1 近似として，次のように求められる (付録 A 参照)．

$$u_{ij}^2 = \frac{1}{K} - \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} (\lambda_{ij} - \bar{\lambda}_i) \quad (15)$$

ここで

$$\lambda_{ij} = \sum_{m=1}^M \prod_{i' \neq i} \left[\frac{1}{K} \sum_{j'=1}^K L_{i'j'}^{(m)} \right] L_{ij}^{(m)} \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \lambda_{ij} \quad (17)$$

よって， u_{ij} の大きさは $-\lambda_{ij}$ に比例して決まる．すなわち

$$\max_j u_{ij}^2 \leftrightarrow \min_j \lambda_{ij} \quad (18)$$

λ_{ij} は， $L(x_1, \dots, x_N)$ を $i' \neq i$ の各変数について全ての節点の平均をとることにより， x_i の 1 変数関数として近似したものの，節点 x_{ij} における値である．すなわち，一樣解はそのような近似をしたときの最適解に対応する．しかし，多くの場合，この近似の精度はあまり高いとは言えず，一樣解から最適化問題の厳密最適解，あるいは性能の良い近似解を求めることはできない．

3.4 許容解

許容解の安定条件は，近似的に次のように与えられる (付録 B 参照)．

$$\alpha_0 > 1 + \alpha_1 (L - \bar{L}) \quad (19)$$

ここで

$$\begin{aligned} L &= L(x_{1j(1)}, \dots, x_{Nj(N)}) \\ &= \sum_{m=1}^M L_{1j(1)}^{(m)} \cdots L_{Nj(N)}^{(m)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bar{L} = \frac{1}{N(K-1)} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq j(i)}^K L_{ij}^{(m)} \prod_{i' \neq i} L_{i'j(i')}^{(m)} \quad (21)$$

\bar{L} は解のある近傍での L の平均値である．ここで， \bar{L} が解によらずほぼ一定値であると仮定する．この仮定は以下において検証する．このとき，式 (19) の右辺第 2 項

は L の値に比例する．すなわち，許容解は対応する目的関数値の小さいものから順に逐次的に分岐し，安定化する．

安定条件 (19) を検証するため，数値解析を行った．目的関数としては，次の Fletcher & Powell の関数⁸⁾を用いた．

$$L(x) = \sum_{i=1}^N (A_i - B_i)^2 \quad (22)$$

$$A_i = \sum_{j=1}^N (a_{ij} \sin \alpha_j + b_{ij} \cos \alpha_j) \quad (23)$$

$$B_i = \sum_{j=1}^N (a_{ij} \sin x_j + b_{ij} \cos x_j) \quad (24)$$

$$-\pi \leq x_i \leq \pi \quad (25)$$

$$a_{ij}, b_{ij} \in [-100, 100]; \alpha_j \in [-\pi, \pi] \quad (26)$$

ここで， a_{ij}, b_{ij}, α_j はランダムに選ばれた定数であり，文献⁸⁾において与えられている．この関数は自明な最適解 $x^* = \alpha, L(x^*) = 0$ を持つ．付録 C に，制約を持つ連続関数に対する局所探索アルゴリズムである逐次 2 次計画法を，この関数に適用した結果を示す．比較的的目的関数値の大きい局所最小解が，数多く存在していることがわかる．

まず， \bar{L} が解によらずほぼ一定値であることの検証を行う． $N = 10, K = 100$ とし，ランダムに発生した 10 万個の解 (格子点) に対する L と \bar{L} の値を計算した結果を図 2 に示す．これより，式 (19) 第 2 項の $L - \bar{L}$ の値は， L の値にほぼ比例していることが分かる．

次に，再び $N = 10, K = 100$ とし， $\alpha_0 - \alpha_1$ 平面の各点で，力学系 (6) に 50 通りのランダムな初期値を与えて計算を行った．得られた許容解に対する目的関数 L の平均値の等高線を図 3 に示す．図 3 は， α_0 の小さい領域では L の小さい許容解のみが安定に存在することを示しており，近似安定条件 (19) と定性的に一致する．すなわち，許容解は α_0 を大きくするに従い，性能の良いものから順に逐次的に安定化する．

4 決定論的アニーリングアルゴリズム

第 3.3 節において，一樣解が目的関数を 1 変数関数として近似したときの最適解に対応することが示された．しかし，多くの場合，これはあまり良い近似ではなく，一樣解から性能の良い近似解を求めることはできない．一方，第 3.4 節において，許容解がパラメータ α_0 に対し，性能の良い近似解から順に，逐次的に安定化することが示された (式 (19))．しかし，これは近似的に求めら

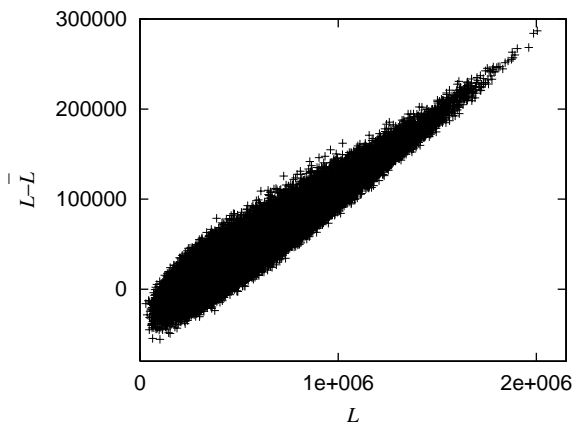


図 2 L に対する $L - \bar{L}$ の値

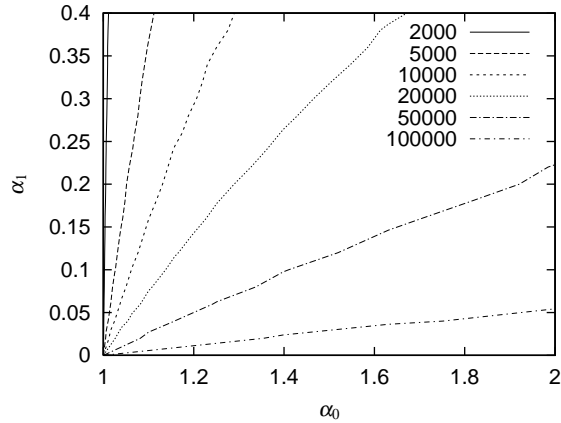


図 3 許容解に対する目的関数 L の平均値 (等高線)

れた条件であり、この条件をもとに性能の良い許容解のみが得られる領域にパラメータを設定することは困難である。そこで、パラメータ α_0 を徐々に増加させる、決定論的アニーリングを適用する。すなわち、 α_0 の十分小さい領域での平衡解を求め、次に α_0 を増加させ、先に求めた平衡解を初期値として次の平衡解を求める。この手続きを繰り返す、最終的に一つの許容解が求められる。

決定論的アニーリングにおける解の変化は、次のように解釈できる； $\sum_j u_{ij}^2 \equiv 1$ より、 $\{u_{ij}^2; j = 1, \dots, K\}$ は変数 x_i の分布であると解釈することができる。そして、式 (7) の第 3 項において、 $[\cdot]$ の部分はこの分布による $L_{ij}^{(m)}$ の期待値と考えられる。そこで

$$\langle L_{ij}^{(m)} \rangle = \sum_{j=1}^K u_{ij}^2 L_{ij}^{(m)} \quad (27)$$

と表わす。一様解に対しては、分布はほぼ一様であり、 $\langle L_{ij}^{(m)} \rangle$ は全ての節点に対する相加平均となる。そして、第 3.3 節で述べたように、一様解はそのような平均によ

る近似をおいた目的関数の最適値に対応する。一方、許容解はデルタ関数的な分布であり、各変数 x_i について、一つの節点 $x_{ij(i)}$ が選ばれ、 $\langle L_{ij}^{(m)} \rangle = L_{ij(i)}^{(m)}$ はその節点に対する $L_{ij}^{(m)}(x_i)$ の値である。すなわち、アニーリングの過程においては、 α_0 を増加させるに従い、分布 $\{u_{ij}^2\}$ が一様分布から徐々に鋭くなっていき、それに伴い、期待値 $\langle L_{ij}^{(m)} \rangle$ による目的関数の近似も精度が良くなっていくと考えられる。そして、最終的には一つの許容解が選ばれる。

具体的なアルゴリズムとしては、まず、決定論的アニーリングによって一つの許容解 (格子点) を求める。 α_0 の更新アルゴリズムは、文献⁷⁾と同様の手法を用いる。そして、得られた格子点を初期値として、逐次 2 次計画法を適用し、最終的な解を求める。これにより、許容領域の中で、得られた格子点に最も近い最小 (極小) 点が求められる。

まず、第 3.4 節で用いた関数で $N = 2, K = 100$ として計算した結果を図 4, 5 に示す。図 4 は決定論的アニーリングにおける目的関数値の変化を示しており、また、図 5 は x_1-x_2 平面上に、目的関数の等高線と解の変化の様子をプロットしたものである。ただし、許容解以外の平衡解に対しては次の条件により一つの節点を選ぶものとする。

$$x_i = x_{ij} \quad \text{if} \quad u_{ij}^2 = \max_j u_{ij}^2, \quad (\forall i) \quad (28)$$

図 4 より、目的関数値は一度増加し、その後減少していることが分かる。また、 $N = 2$ の場合には目的関数は四つの谷を持つが、図 5 より、アニーリングの初期にはそのうち一つの谷の中で解は小さく変動し、やがてもう一つの谷へと移った後、また少し変動し、最適解に最も近い格子点に収束していることが分かる。

次に、 $N = 30, K = 100$ とし、決定論的アニーリングアルゴリズムを適用した結果を図 6、及び、表 1, 2 に示す。図 6 は目的関数値の変化の様子を表わす。全体としては、 α_0 を増加させるに従って目的関数値は減少していることが分かる。決定論的アニーリングにより得られた解は、表 1 に示す通り、 $L = 581.6$ であり、計算機上での実計算時間は 5 分以下であった。そして、得られた格子点を初期値とした逐次 2 次計画法を適用することで、最適解が得られている。また、表 2 は逐次 2 次計画法によって解が動いた距離を、節点間隔を単位として示したものである。全 30 変数中 10 変数は節点間隔以下の動きにとどまっておき、最も大きく動いた変数でも、動いた距離は節点間隔の 4 倍以下であった。これは、決定論的アニーリングにより、逐次 2 次計画法の初期値としては十分性能の良い近似解が得られていたことを示す。

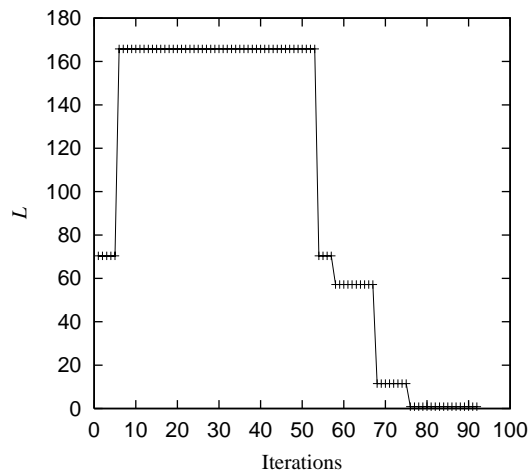


図 4 目的関数値の変化の様子 ($N = 2$, 横軸は α_0 の更新回数)

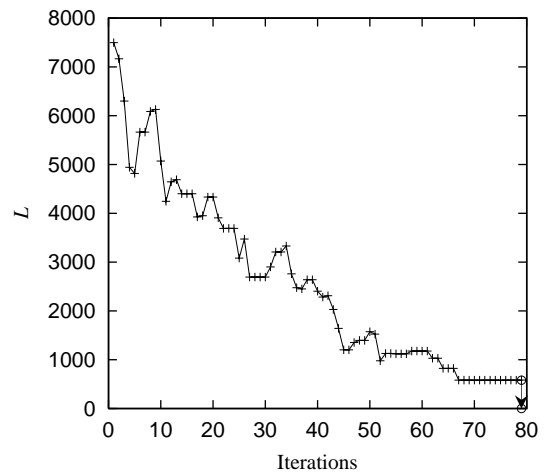


図 6 目的関数値の変化の様子 ($N = 30$, 横軸は α_0 の更新回数, 矢印は逐次 2 次計画法による)

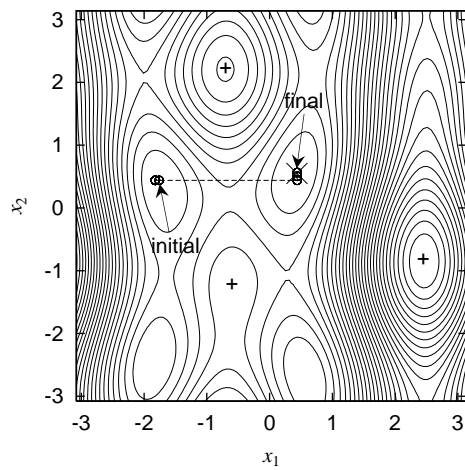


図 5 解の変化の様子 ($N = 2$, \times は最適解 $x_i = \alpha_i$, $+$ は関数の極大 (山) を表わす)

5 まとめ

力学系による非線形最適化問題の近似解法を提案した。矩形の定義域を持つ、1 変数関数の積の和という関数形の目的関数に対して、各変数を有限個の節点に分割し、離散最適化問題として定式化した。そして、各節点に動的素子を配置し、それらの動的素子を状態変数とする力学系を構成した。構成した力学系においては格子点に対応した平衡解が、力学系に含まれるコントロールパラメータを増加させると、その目的関数値の小さいものから順に逐次的に安定化することを示した。さらに、この結果をもとに、コントロールパラメータを徐々に増加させる決定論的アニーリングと連続的な逐次 2 次計画法とを組合せたアルゴリズムを提案し、数値的に検証した。その結果、決定論的アニーリングにより、比較的短い時間で

表 1 決定論的アニーリングアルゴリズムの結果

アニーリング		
L	ステップ数 [†]	CPU 時間*
581.6	31233	287 秒

↓

逐次 2 次計画法		
L	ステップ数 [‡]	CPU 時間*
$< 10^{-6}$	360	6.75 秒

[†] 時間積分のステップ数

* DEC Alpha Station 500/333 上

[‡] 目的関数値の計算回数

表 2 逐次 2 次計画法による解の移動距離 (単位: 節点間隔)

0~1	1~2	2~3	3~4
10 変数	13 変数	4 変数	3 変数

最適解に十分近い格子点を得ることができ、さらに得られた格子点を初期値として逐次 2 次計画法を適用することで、最適解が得られた。すなわち、この手法は連続的な局所探索法に対する良い初期値を与えるアルゴリズムであるということもできる。

本手法では、適用可能な目的関数は式 (2) の様に表わされるものに限定されている。そのため、より一般的な関数形を持つ問題に対しては本手法をそのまま適用することは困難である。しかし、式 (2) の様に表わすことのできない項を新たな変数として置き換え、その置き換えが成り立つようにペナルティ項を付け加えることで、適用は可能になる。これについては、ペナルティ項の重み係数の決定法等も含めて、今後の課題である。また、決

定論的アニーリングの遷移過程については、より詳細な解析が必要と考えられる。これについても今後の課題である。

参考文献

- 1) 茨木俊秀, 福島雅夫: 最適化の手法, 共立出版 (1993).
- 2) Horst, R. and Pardalos, P. M. eds.: *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers (1995).
- 3) Hopfield, J. J. and Tank, D. W.: “Neural” Computation of Decisions in Optimization Problems, *Biological Cybernetics*, Vol. 52, pp. 141–152 (1985).
- 4) Reeves, C. R. ed.: *モダンヒューリスティックス—組合せ最適化の先端手法—*, 日刊工業新聞社 (1997).
- 5) Mikhailov, A. S.: *Foundations of Synergetics I*, chapter 7, Springer-Verlag (1994).
- 6) 土屋和雄, 西山岳宏, 辻田勝吉: 分岐特性を用いた組合せ最適化問題の近似解法, 第 10 回自律分散システムシンポジウム資料 (1998).
- 7) 土屋和雄, 西山岳宏, 辻田勝吉: 分岐特性を用いた組合せ最適化問題の近似解法—第 2 報: 決定論的アニーリングアルゴリズムの解析, 第 11 回自律分散システムシンポジウム資料 (1999).
- 8) Bäck, T.: *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*, chapter 3, Oxford University Press, New York (1996).

付録

A 近似一様解 (15) の導出

一様解は次式を満たす。

$$f_{ij} - g_i = 0 \quad (\forall i, j) \quad (29)$$

ただし, $\sum_j u_{ij}^2 \equiv 1 \quad (\forall i)$ が常に成立する。 $\alpha_1 = 0$ のとき, 式 (29) の解は次のように求められる。

$$u_{ij}^2 = \frac{1}{K} \quad (30)$$

そこで, $\alpha_1 \neq 0$ のとき $u_{ij}^2 = \frac{1}{K} + \alpha_1 u_{ij}^{(1)}$ とおいて式 (29) に代入し, α_1 の高次の項を無視すると

$$u_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{1 - \alpha_0} (\lambda_{ij} - \bar{\lambda}_i) \quad (31)$$

すなわち, 式 (15) を得る。

B 近似安定条件 (19) の導出

許容解近傍で

$$u_{ij} = \begin{cases} \pm 1 \pm \delta u_{ij} & (j = j(i)) \\ \delta u_{ij} & (j \neq j(i)) \end{cases} \quad (\forall i) \quad (32)$$

とおき, 力学系 (6) を線形化すると

$$\bullet \quad j = j(i)$$

$$\delta \dot{u}_{ij} = 0 \quad (33)$$

$$\bullet \quad j \neq j(i)$$

$$\delta \dot{u}_{ij} = \left(1 - \alpha_0 + \alpha_1 L - \alpha_1 \sum_{m=1}^M L_{ij}^{(m)} \prod_{i' \neq i} L_{ij(i')}^{(m)} \right) \delta u_{ij} \quad (34)$$

を得る。ここで, L は許容解に対する目的関数の値であり, 式 (20) で与えられる。許容解は

$$1 - \alpha_0 + \alpha_1 L - \alpha_1 \sum_{m=1}^M L_{ij}^{(m)} \prod_{i' \neq i} L_{ij(i')}^{(m)} < 0 \quad (35) \\ (\forall i, j; j \neq j(i))$$

が成り立つとき, 安定である。式 (35) を $j \neq j(i)$ である全ての i, j について和をとり, $N(K-1)$ で割ると, 式 (19) を得る。

C 逐次 2 次計画法による結果

ここでは, $N = 30$ の Fletcher & Powell の関数 (22) に逐次 2 次計画法を適用した結果を示す。MATLAB Optimization Toolbox を使い, 初期値として $-\pi \leq x_i \leq \pi$ の一様乱数を与え, 1 万回の試行を行った。得られた結果のヒストグラムを 図 7 に示す。1 回の試行における目的関数値の計算回数は, 平均で 248, 計算機上での総計算時間は 101287 秒であった。また, 目的関数値の平均は $L = 965189$ であり, 最適解 ($L < 10^{-4}$) が得られたのは 1 万回の試行の内, 4 回であった。

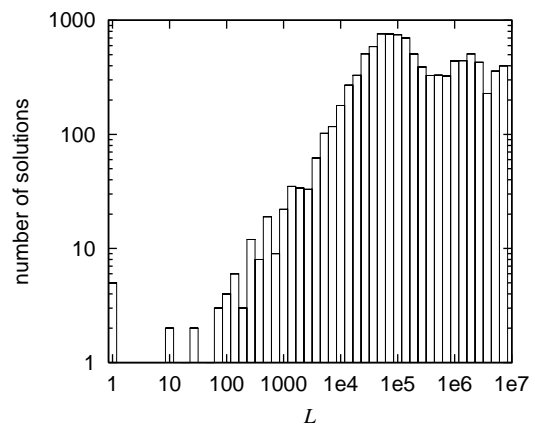


図 7 逐次 2 次計画法の結果