

あるクラスの実ホロノミックシステムに対する リャプノフ制御

京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻

土屋 和雄 ○ 浦久保 孝光 辻田 勝吉

Lyapunov Control of a Class of Non-holonomic Systems

Kazuo Tsuchiya ○ Takateru Urakubo Katsuyoshi Tsujita

Dept. of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Abstract : In this paper, we deal with the control problem of a class of non-holonomic systems which have m input variables. In the system, if the input vector fields and the first level of Lie brackets between them span the tangent space at each configuration, the system can move in every direction using the first level of Lie bracket motions and it is controllable. We derive a time-invariant discontinuous state feedback law for the system based on the Lyapunov control: The input is designed so that the derivative of the Lyapunov function is composed of a symmetric and an asymmetric bilinear form in the gradient vectors of the Lyapunov function. In the controlled system, the desired point is the only stable equilibrium point. The behavior of the controlled system is verified by numerical simulations.

1 はじめに

力学系において速度変数に対する非可積分な拘束条件は非ホロノミックな拘束条件と呼ばれる。例えば、二輪移動ロボットなどの車輪型移動ロボットにおいて、車輪が接地点において滑らないという条件、宇宙ロボットなどにおいて、その角運動量が保存されるという条件は、非ホロノミックな拘束条件と見なせる。このような拘束条件によって、システムは局所的には運動の自由度を拘束されるが、大域的にはあらゆる状態への到達が可能であり可制御となる場合がある。このような非ホロノミックな拘束条件を持つシステムは非ホロノミックシステムと呼ばれ、近年、活発に研究がなされてきた ([1],[2])。

非ホロノミックシステムはたとえ可制御であっても、滑らかなフィードバック制御によって、目標点を漸近安定化することができないことが知られている ([3])。そこで、これまでに提案されてきたフィードバック制御則は2つに大別される。1つは時変なフィードバック制御則であり ([4],[5])、1つは不連続なフィードバック制御則である ([6],[7],[8])。しかし、これらの研究においては対象とするシステムは Chained form と呼ばれる2入力のシステムに対するものがほとんどであり、一般の m 入力のシステムに対する研究はあまりなされていない。

本研究では、一般の m 入力を持つドリフト項のない対称アフィンシステムで表わされる非ホロノミックシステムを考える。特に、入力に対応するベクトル場の一次の Lie 括弧積までを考えることで、可制御性が成り立つシステムを対象とする。このとき、状態変数の数は $m + {}_m C_2$ までとなる。このようなクラスの実ホロノミックシステムに対して Lyapunov の方法を拡張することで目標状態を漸近安定化する手法を提案する。非ホロノミックシステムでは Lyapunov 関数の負勾配方向の入力では目標状態以外の平衡点にもシステムが安定化される。そこで、提案する手法では、Lyapunov 関数の値を変化させない方向の入力、すなわち、Lyapunov 関数の値が一定となる球面の接線方向の入力を考える。この入力はシステムに目標状態以外の平衡点を回避させる。その結果、Lyapunov 関数の負勾配方向の入力と組み合わせることで、システムは目標状態に漸近安定化される。

以下、2章では対象とするシステムの定式化を行い、3章では、このシステムに対して、目標点を漸近安定化する時不変不連続状態フィードバック制御則を構成する。また、制御されたシステムの安定平衡点が目標点のみとなることを解析により示す。4章では、具体例として、入力変数の数が2および3の場合を考え、数値シミュレーションを行い、設計された制御則の有効性を確認する。

2 対象とするシステム

次のようなシステムを考える。

$$\dot{y}_i = u_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

$$\dot{x}_{ji} = y_j u_i \quad (i < j) \quad (2)$$

ここで、状態変数 y_i は入力 u_i により直接制御され、状態変数 x_{ji} は変数 y_j と u_i により制御される。このシステムは Murray らによって、First Order Systems として導入された ([9])。状態変数を

$$z = [y_1, \dots, y_m, x_{21}, x_{31}, x_{32}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mm-1}]^T \quad (3)$$

と表わし、入力変数を $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ と表わせば、このシステムは次のように表現される。

$$\dot{z} = Bu \quad (4)$$

ここで、

$$B = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & & & & \\ y_2 I_{1 \times 1} & 0 & \dots & & 0 \\ y_3 I_{2 \times 2} & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ y_m I_{m-1 \times m-1} & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

であり、 $I_{k \times k}$ は $k \times k$ の単位行列である。入力 u_i に対応するベクトル場を X_i とすると、

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i < j} y_j \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \quad (6)$$

となり、変数 y_i は直接、入力 u_i により制御される。また、ベクトル場 X_i, X_j の Lie 括弧積 $[X_i, X_j]$ は次のように計算される。

$$[X_i X_j] = -\frac{\partial}{\partial x_{ji}} \quad (7)$$

よって、この Lie 括弧積 $[X_i X_j]$ によって、変数 x_{ji} を制御できる。すなわち、対象とするシステムは入力に対応するベクトル場 X_i ($i = 1, \dots, m$) と一次の Lie 括弧積 $[X_i X_j]$ ($i < j$) によって、状態空間の各点でその接空間を張ることができ制御となる。

3 制御系設計

3.1 制御則の構成

Lyapunov 関数:

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m y_i^2 + \sum_{i<j} x_{ji}^2 \right) \quad (8)$$

を考え、次のように制御則を設計する。

$$u = \alpha u_s + \beta u_a \quad (9)$$

ここで、パラメータ α, β は正の定数であり、

$$u_s = -IB^T \nabla V, \quad (10)$$

$$u_a = -\sum_{i<j} \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji} B^T \nabla V. \quad (11)$$

ただし、

- I : $m \times m$ 単位行列
- J_{ji} : i 行 j 列, j 行 i 列の要素がそれぞれ $1, -1$ の $m \times m$ 反対称行列

$$(例) \quad J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

また、

$$g = |B^T \nabla V|, \quad (12)$$

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{mm-1}} \right]^T,$$

であり、 $B^T \nabla V$ は次のように計算される。

$$B^T \nabla V = \begin{bmatrix} y_1 + \sum_{j=2}^m y_j x_{j1} \\ y_2 + \sum_{j=3}^m y_j x_{j2} \\ \vdots \\ y_k + \sum_{j=k+1}^m y_j x_{jk} \\ \vdots \\ y_{m-1} + y_m x_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

入力 u_s, u_a は次のような意味を持つ。

1. $u = u_s$ のとき

$$\dot{V} = -g^2 \leq 0 \quad (14)$$

これより、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$g \rightarrow 0 \iff y_1, y_2, \dots, y_m \rightarrow 0$$

したがって、システムは $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) の $m C_2$ 次元の空間に漸近し、その空間上で停止する。

2. $u = u_a$ のとき

$$\dot{V} = -\sum_{i<j} \frac{x_{ji}}{g^2} (B^T \nabla V)^T J_{ji} (B^T \nabla V) = 0 \quad (15)$$

これより、システムは $V(z) = V_c = \text{const.}$ で表される球面上に拘束される。また、このとき、 $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) かつ $V(z) = V_c$ の状態は不安定となり、システムは $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) の点から遠ざかる。

以上の考察から、制御入力 u_s, u_a を組み合わせた制御入力 (9) により、システムは $V(z) = V_c$ 上を $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) の点を避けながら移動し、 V_c が減少するに従い目標点である原点に収束すると考えられる。

3.2 制御された系の振舞

入力 (9) に対する基礎式 (4) は次のようになる。

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i<j} \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji}) B^T \nabla V \quad (16)$$

これを解析のために次のように連続化する。

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i<j} \tanh\left(\frac{g^2}{\epsilon}\right) \frac{x_{ji}}{g^2} J_{ji}) B^T \nabla V \quad (17)$$

ここで、 ϵ は正の微小な定数である。(17) 式の平衡点は $B^T \nabla V = 0$ の点であり、(13) 式より、

$$B^T \nabla V = 0 \iff y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0 \quad (18)$$

である。この平衡点近傍で (17) 式を線形化すると、次のような形になる。

$$\delta \dot{z} = -B(\alpha I + \beta \sum_{i<j} \frac{x_{ji}}{\epsilon} J_{ji}) \frac{\partial B^T \nabla V}{\partial z} \delta z \equiv A \delta z \quad (19)$$

行列 A の 0 以外の固有値に関して次式が成り立つ。

$$\text{trace} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = -m\alpha + \sum_{i<j} \frac{\beta x_{ji}^2}{\epsilon} \quad (20)$$

平衡点 $B^T \nabla V = 0$ が安定となるためには、すべての λ_i の実部が負でなければならない。そのための必要条件は (20) 式より次のようになる。

$$\sum_{i<j} x_{ji}^2 < \frac{m\alpha}{\beta} \epsilon \quad (21)$$

また、明らかに原点 ($x_{ji} = 0$) は安定平衡点である。したがって、安定平衡点は原点近傍の ϵ に応じた微小な領域にのみ存在する。さらに、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすることにより、安定平衡点は原点のみとなる。

4 数値例

前節で得られた制御則を具体的に $m = 2, 3$ の場合に構成し、その有効性を数値シミュレーションによって確認する。

4.1 $m = 2$ の場合

$m = 2$ の場合状態変数は最大 3 となる。このような力学系としては、二輪移動ロボット、2 個のホイールで姿勢制御を行う人工衛星等がある。この種のシステムは、Chained form に変換され Chained form に基づく一般的な制御則で制御系を構成できるが、ここでは、本論文で提案する方法によって制御系を設計する。次のようなシステムを考える。

$$\dot{z} = Bu \quad (22)$$

$$z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_{21} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Lyapunov 関数：

$$V(z) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_{21}^2) \quad (24)$$

を用いて，制御則は具体的に次のようになる．

$$u = -(\alpha I + \beta \frac{x_{21}}{g^2} J) B^T \nabla V \quad (25)$$

このとき，基礎方程式は

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \beta \frac{x_{21}}{g^2} J) B^T \nabla V \quad (26)$$

となる．(26) 式をもとに $\alpha = 1.0$, $\beta = 5.0$ とし，初期値を $[y_1, y_2, x_{21}] = [0.1, 0.1, 1.0]$ として，数値シミュレーションを行った．Fig.1は状態変数 z の軌跡を示してい

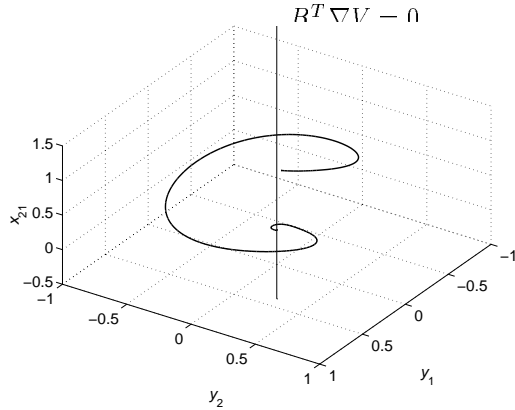


Figure 1: 状態変数 z の振舞

る．システムは初期状態で平衡点 $B^T \nabla V = 0$ の近傍にあるが，入力 u_a の効果ですみやかに平衡点 $B^T \nabla V = 0$ から遠ざかり，その後原点に収束している．また，Fig.2に示すように，この場合入力も滑らかに 0 に収束する．原点近傍での振る舞いは近似的に解析でき，変数 x_{21} ， $g(\approx \sqrt{y_1^2 + y_2^2})$ に関して次のように表わされる ([10])．

(i) $g^2 < O(|x_{21}|)$ のとき，

$$x_{21} = C_1 e^{-\frac{\beta}{2}t} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \beta \neq 2\alpha : g = \sqrt{C_2 e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha - \beta} C_1^2 e^{-\beta t}} \\ \beta = 2\alpha : g = \sqrt{(\beta C_1^2 t + C_2) e^{-2\alpha t}} \end{cases} \quad (28)$$

(ii) $g^2 \geq O(|x_{21}|)$ のとき，

$$g = C_3 e^{-\alpha t}, \quad |x_{21}| \leq O(e^{-2\alpha t}) \quad (29)$$

ここで， C_1, C_2, C_3 は定数である．とくに， $\beta > 4\alpha$ のとき，(i) の領域にある状態は (ii) の領域に向かい，状態変数，入力変数とも指数的に 0 に収束する．

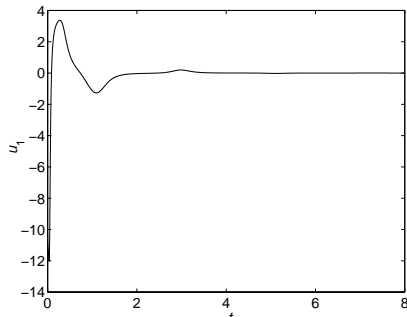


Figure 2: 入力 u_1 の時間履歴

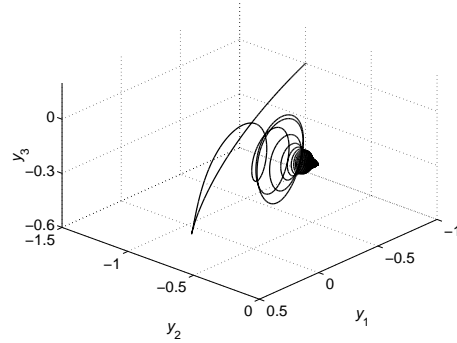


Figure 3: 変数 y_1, y_2, y_3 の振舞

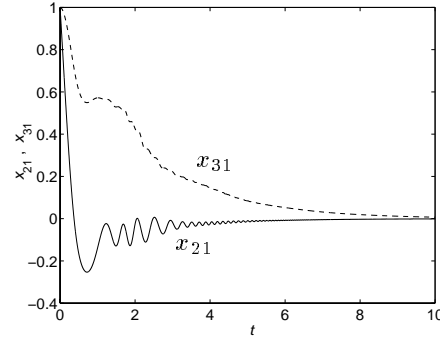


Figure 4: 変数 x_{21}, x_{31} の振舞

4.2 $m = 3$ の場合

$m = 3$ の場合，基礎方程式 (4) によると状態変数の数は 6 以下である．このような力学系の例としては，水中ロボットがある ([7],[11])．ここでは次のような状態変数の数が 5 のシステムを考える．

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y_2 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Lyapunov 関数：

$$V(z) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2) \quad (31)$$

を用いて，制御則は具体的に次のようになる．

$$u = -(\alpha I + \frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31}) B^T \nabla V \quad (32)$$

このとき，基礎方程式は

$$\dot{z} = -B(\alpha I + \frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31}) B^T \nabla V \quad (33)$$

となる．

(33) 式をもとに数値シミュレーションを行った結果を Fig.3 ~ 6 に示す．初期値は $[y_1, y_2, y_3, x_{21}, x_{31}] = [-1.0, -1.0, 0.0, 1.0, 1.0]$ であり，パラメータ α, β は $\alpha = 1.0, \beta = 5.0$ とした．Fig.3 に示すように，システムは状態変数 y_i に関して円運動を行い，これに伴う Lie 括弧積によって，状態変数 x_{21}, x_{31} が 0 に向かっている (Fig.4)．このような原点付近での振舞は解析により，次のような近似解で表わされる ($\beta > 1$)．

$$y_1 = \sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cos(\frac{\beta}{g^2} \sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2} t + \phi) \quad (34)$$

$$y_2 = x_{21} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin\left(\frac{\beta}{g^2} \sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2} t + \phi\right) + \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta}} x_{31} \quad (35)$$

$$y_3 = x_{31} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin\left(\frac{\beta}{g^2} \sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2} t + \phi\right) - \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta}} x_{21} \quad (36)$$

$$x_{21} = C_4 e^{-\frac{\alpha}{2} t} \quad (37)$$

$$x_{31} = C_5 e^{-\frac{\alpha}{2} t} \quad (38)$$

ここで、 C_4 、 C_5 、 ϕ は定数である。このとき、Fig.5よりシステムは指数的に原点に収束している。しかし、その入力Fig.6に示すように激しく振動し、振幅一定で周波数が指数的に増大するものとなる。制御系のこのような振舞は望ましくないため、(34)~(36)式をもとに、制御則を次のように修正する。

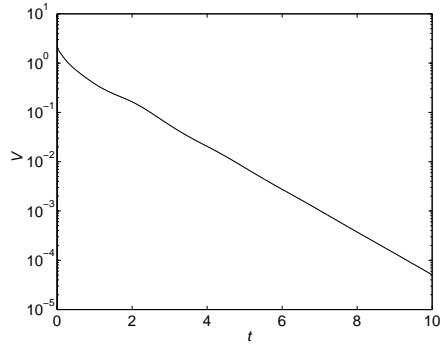


Figure 5: Lyapunov 関数 V の時間履歴

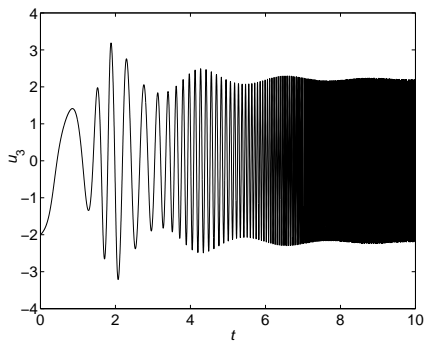


Figure 6: 入力 u_3 の時間履歴

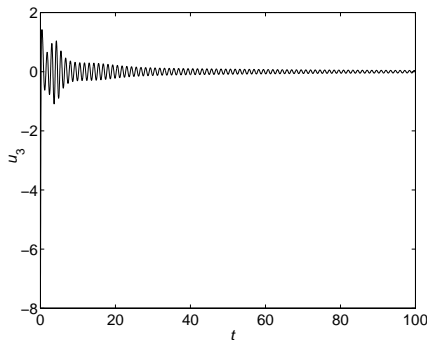


Figure 7: 入力 u_3 の時間履歴

$$u = -\frac{g^2}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2}} \left(\alpha I + \frac{\beta x_{21}}{g^2} J_{21} + \frac{\beta x_{31}}{g^2} J_{31} \right) B^T \nabla V \quad (39)$$

これにより、状態変数 z の空間内での振舞の軌跡は変わらないが、その入力の周期は $2\pi/\beta$ で一定となり、その大きさは $\frac{g^2}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{31}^2}}$ とともに 0 に収束する (Fig.7)。

5 まとめ

本論文では状態変数の数が $m + mC_2$ 、入力変数の数が m の非ホロノミックシステムに対して、目標点を漸近安定化する時不変不連続状態フィードバック則を提案した。対象とするシステムは、入力に対応するベクトル場の一次の Lie 括弧積によって、あらゆる状態空間の方向に運動可能であり可制御となる。制御則は、Lyapunov 法をもとにし、Lyapunov 関数の値を変えない入力成分を用いることで構成された。このような入力成分によって、システムの安定平衡点は原点のみとなる。このことを解析により示し、具体例に対する数値シミュレーションによって確認した。

参考文献

- [1] 中村：“非ホロノミックロボットシステム”，日本ロボット学会誌，Vol. 11, No. 4 ~ Vol. 12, No. 2, 1993 ~ 1994
- [2] 三平：“非ホロノミック系のフィードバック制御”，計測と制御，Vol. 36, No. 6, 1997, pp.396-403
- [3] R. W. Brockett：“Asymptotic Stability and Feedback Stabilization”，Differential Geometric Control Theory, edited by R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussman, Birkhauser, Boston, 1983, pp.181-191
- [4] C. Samson：“Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots”，IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 1, 1995, pp.64-77
- [5] J.-B. Pomet：“Explicit Design of Time-varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems without Drift”，System & Control Letters, Vol. 18, No. 2, 1992, pp.147-158
- [6] A. Astolfi：“Discontinuous Control of Nonholonomic Systems”，System & Control Letters, Vol. 27, 1996, pp.37-45
- [7] H. Khennouf and C. Canudas de Wit：“Quasi-continuous Exponential Stabilizers for Nonholonomic Systems”，Proceedings of International Federation of Automatic Control 13th World Congress, San Francisco, USA, 1996, 2b-174
- [8] 成清, 杉田：“Chained Form で記述された非ホロノミック系の指数安定化”，計測自動制御学会論文集, Vol. 32, No. 8, 1996, pp.1310-1312
- [9] R. M. Murray and S. S. Sastry：“Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids”，IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 5, 1993, pp.700-716
- [10] K. Tsuchiya, T. Urakubo and K. Tsujita：“Motion Control of a Non-holonomic System Based on the Lyapunov Control Method”，submitted to Journal of Guidance, Control, and Dynamics
- [11] O. Egeland, M. Dalsmo and O. J. Sordalen：“Feedback Control of a Nonholonomic Underwater Vehicle with Constant Desired Configuration”，International Journal of Robotics Research, Vol. 15, No. 1, 1996, pp.24-35