

四輪移動車のフィードバック制御

京都大学 土屋 和雄 浦久保 孝光 ○長岡 弘太郎 辻田 勝吉

Feedback Control of a Four-wheeled Vehicle

Kazuo tsuchiya Takateru Urakubo ○Kotaro Nagaoka Katsuyoshi Tsujita

Kyoto University

Abstract:In this paper, we propose a feedback control law of a four-wheeled vehicle based on a kinematic model. The control input is composed of discontinuous state feedback control input by extending the Lyapunov control and time-varying feedback control input using sinusoids. Using averaging theory, the behavior of controlled system is investigated and numerical simulations are carried out to verify the control performance.

1 はじめに

本論文は四輪移動車の状態フィードバック制御を扱う。対象とする四輪移動車は2つの前輪、2つの後輪をもち、後輪が駆動することで前進後退し、前輪の向きを変えることで進行方向を変える。この四輪移動車の位置および姿勢角を目標の位置および姿勢に移動させることを考える。四輪移動車は水平な床の上を動くものとし、各車輪は接地点ですべらないものと仮定すれば、四輪移動車の運動は各車輪の接地点における運動学的関係式によって決定される。後輪の駆動、前輪のステアリングを自由に操作できるとすれば、システムは2入力・4状態変数の非ホロノミックシステムとして表現される。

このようなシステムでは、目標点を漸近安定化させるような滑らかな時不変の状態フィードバック則は存在しない([1])。そこで、四輪移動車の状態フィードバック制御則として、時変状態フィードバック則([4],[5],[6])や、滑らかな状態フィードバック則([7])等が提案されてきた。これらのうちの多くは、システムをChained Formと呼ばれる正準形に変換し、変換した系に対して制御則を提案している。しかし、四輪移動車のモデルでは、Chained form変換を行うと、姿勢角について適用限界が生じ([3])、それをこえるような状態を出発点として目標点へ移動させることができない。

本論文では、四輪移動車の運動を決定する運動学的関係式を制御系設計のための基礎式として用い、制御則を導出する。制御入力としては、不連続な入力を用いる拡張リャプノフ法([8])と、時間周期関数を含む制御入力とを組み合わせて設計する。得られた制御則は、任意の初期状態から目標点に四輪移動車を移動することができる。提案する制御則による系の振る舞いを平均化法を用いて解析的に調べる。また、数値シミュレーションによる検討も行う。

2 四輪移動車のモデル

4輪移動車のモデルを図1に示す。水平面上に座標 $O-xy$ を定義する。四輪移動車の目標位置・姿勢は、両後輪の中点 C_b が座標原点 O に一致し、 C_b と両前輪の中点 C_f とを結ぶ線分(四輪移動車の中心線)が Ox 軸に一致することである。四輪車本体の運動は水平面内に拘束されているとする。 C_b の座標を (x, y) 、中心線と Ox 軸とがなす角を θ 、 C_f が移動する方向と中心線とが

なす角を ϕ とし、 C_b の移動速度を v とする。また、4輪車のホイールベースを L とする。各後輪は接地点でそれぞれすべらないとする。また、各前輪のステアリング角は ϕ の関数として接地点ですべらないようにそれぞれ与えられているとする。この時四輪移動車の運動は各車輪の接地点における運動学的関係式で決定される。すなわち、四輪移動車の運動は次式で表現される。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{v}{L} \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{但し、} |\phi| \leq \phi_{max} < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

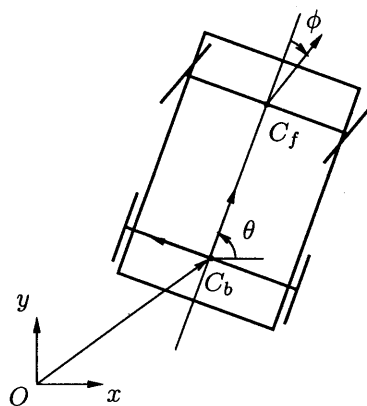


図1: 4輪移動車のモデル

式(1)に対し次のような変換を施す。

$$z_1 = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3)$$

$$z_2 = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (4)$$

$$z_3 = \theta \quad (5)$$

$$z_4 = \frac{1}{L} \tan \phi \quad (6)$$

$$u_1 = v \quad (7)$$

$$u_2 = \frac{\dot{\phi}}{L \cos^2 \phi} \quad (8)$$

変換後の変数に対する方程式は次のようになる。

$$\dot{z} = Bu \quad (9)$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 + z_2 z_4 & 0 \\ -z_1 z_4 & 0 \\ z_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

3 制御系の設計と解析

方程式 (9) において変数 u を自由に制御できる制御入力とし、方程式 (9) を制御系設計のための基礎式と考え、制御系設計を行う。

3.1 制御則

次のような入力を考える。

$$u = u_1 + u_2 \quad (10)$$

$$u_1 = -(\alpha I + \beta J) B^T \nabla V \quad (11)$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} a_1 f_1(z_2) \sin(\omega_1 t + \gamma_1) \\ a_2 f_2(z_2) \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$V = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

ここで、

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\beta} = \frac{\beta z_3}{|B^T \nabla V|}$$

$\alpha > 0, \beta > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$
 $\alpha, \beta, a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$: 定数

$f_1(z_2)$ は $|z_2|$ について単調増加、 $f_2(z_2)$ は z_2 について単調減少で、 $f_1(0) = f_2(0) = 0$ とする。

式 (10) において、制御入力 u_1 は拡張リヤプノフ法による不連続状態フィードバック入力であり、制御入力 u_2 は時変フィードバック入力である。以下で、制御入力 u_1, u_2 それぞれの制御性能を解析したのち、両者を結合した制御入力 u の制御性能を解析する。

3.2 拡張リヤプノフ法による入力 u_1

入力 u_1 、式 (11) をシステム (9) に加えた閉ループシステムは次のようになる。

$$\dot{z} = B(-\alpha I - \beta J) B^T \nabla V \quad (13)$$

よって、 V の時間微分は次のようになる。

$$\dot{V} = -|B^T \nabla V| \leq 0 \quad (14)$$

したがって、 $t \rightarrow \infty$ のとき、

$$g = |B^T \nabla V| = \sqrt{(z_1 + z_3 z_4)^2 + z_4^2} \rightarrow 0 \quad (15)$$

となり、時間が経つにつれて z_1, z_4 は 0 に近づく。そこで、 $z_1 = z_4 = 0$ の近傍での系の振る舞いを解析する。

式 (13) において、 $g = 0$ となる点で不連続となるので、十分小さい正数 ε を用いて、 $\frac{1}{g}$ を $\tanh(\frac{g}{\varepsilon}) \frac{1}{g}$ で連続化して近似する。このようにして式 (13) を連続化し、平衡点 $z_1 = z_4 = 0$ の近傍で線形化すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha z_3 - \beta \frac{z_3}{\varepsilon} \\ \beta \frac{z_3}{\varepsilon} & -\alpha + \beta \frac{z_3}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0 \quad (17)$$

式 (16) の右辺の係数行列の固有値 λ は、

$$\lambda = 0, \frac{1}{2} [-(2\alpha - \beta \frac{z_3^2}{\varepsilon}) \pm \sqrt{(2\alpha - \beta \frac{z_3^2}{\varepsilon})^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2 \frac{z_3^2}{\varepsilon^2})}] \quad (18)$$

となる。これにより系の安定性は以下のようになる。

- $|z_2| < \sqrt{\frac{2\alpha\varepsilon}{\beta}}$ のとき、安定渦状点
- $\sqrt{\frac{2\alpha\varepsilon}{\beta}} < |z_2| < 2\sqrt{\alpha + \frac{\varepsilon}{\beta}}$ のとき、不安定渦状点
- $|z_2| > 2\sqrt{\alpha + \frac{\varepsilon}{\beta}}$ のとき、不安定結節点

よって、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、安定平衡点は $z_2 = 0$ のみになる。したがって、式 (11) で入力を与えたとき、解は

$$z_1 = z_3 = z_4 = 0$$

$$z_2 : \text{任意}$$

に収束することがいえる。

3.3 時変フィードバック入力 u_2

拡張リヤプノフ法による入力 u_1 だけでは、 $z_1 = z_3 = z_4 = 0$ となる点で安定となり、そのような点では z_2 方向には動けない。そこで、そのような点において z_2 を動かすような時変フィードバック入力 u_2 を設計する。

入力 u_2 、式 (12) を式 (9) に代入し、 $z_1 = z_3 = z_4 = 0$ のまわりで主要項を残すことにより、次式を得る。

$$\dot{z}_1 = a_1 f_1(z_2) \sin(\omega_1 t + \gamma_1) \quad (19)$$

$$\dot{z}_4 = a_2 f_2(z_2) \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \quad (20)$$

式 (19)(20) から z_1, z_4 を求め、 z_2, z_3 の式に代入して次式を得る。

$$\dot{z}_2 = a_1^2 a_2 \frac{f_1^2 f_2}{\omega_1 \omega_2} \sin(\omega_1 t + \gamma_1) \cos(\omega_1 t + \gamma_1) \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \quad (21)$$

$$\dot{z}_3 = a_1 a_2 \frac{f_1 f_2}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \gamma_1) \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \quad (22)$$

$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 2\omega, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ とおき、式 (21),(22) を周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ で平均化して、次式を得る。

$$\dot{z}_2 = a_1^2 a_2 \frac{f_1^2 f_2}{8\omega^2}, \dot{z}_3 = 0 \quad (23)$$

式 (23) は、 $f_1^2(z_2) f_2(z_2) \propto -z_2$ となるように $f_1(z_2)$ および $f_2(z_2)$ を選べば、 z_2 を指数的に 0 に収束させることができることを示している。

3.4 提案する制御則とその性能

u_1, u_2 を組み合わせて、次の制御則を提案する。

$$u = -(\alpha I + \hat{\beta} J) B^T \nabla V + \begin{bmatrix} a_1 f_1(z_2) \sin \omega t \\ a_2 f_2(z_2) \cos 2\omega t \end{bmatrix} \quad (24)$$

入力 u , 式 (24) を式 (9) に代入するして次式を得る。

$$\dot{z}_1 = -\alpha(1 + z_2 z_4)(z_1 + z_3 z_4) - \beta \frac{z_3}{g} z_4(1 + z_2 z_4) + a_1(1 + z_2 z_4) f_1 \sin \omega t \quad (25)$$

$$\dot{z}_2 = \alpha z_1 z_4(z_1 + z_3 z_4) + \beta \frac{z_3}{g} z_1 z_4^2 - a_1 z_1 z_4 f_1 \sin \omega t \quad (26)$$

$$\dot{z}_3 = -\alpha z_4(z_1 + z_3 z_4) - \beta \frac{z_3}{g} z_4^2 + a_1 z_4 f_1 \sin \omega t \quad (27)$$

$$\dot{z}_4 = -\alpha z_4 + \beta \frac{z_3}{g}(z_1 + z_3 z_4) + a_2 f_2 \cos 2\omega t \quad (28)$$

式 (25)-(28) のシステムについて、次の仮定のもとで解析を行う。

仮定 1 a_1, a_2 は α より十分小さい

仮定 2 β は α より十分小さい

次の 2 つの場合に分けて解析する。

1. z_1, z_3, z_4 のいずれかが $O(1)$ 以上の場合

この場合、仮定から、式 (25)-(28) の右辺第 3 項を無視することができ、 u_1 のみが加わっていると見なせる。したがって、3.2 節の議論から、 z_1, z_3, z_4 は 0 の近傍まで近づく。

2. z_1, z_3, z_4 が 1 より十分小さい場合

z_1, z_3, z_4 が小さいことと、仮定 1, 2 から、式 (25)-(28) は次のように近似される。

$$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + a_1 f_1 \sin \omega t \quad (29)$$

$$\dot{z}_2 = 0 \quad (30)$$

$$\dot{z}_3 = 0 \quad (31)$$

$$\dot{z}_4 = -\alpha z_4 + a_2 f_2 \cos 2\omega t \quad (32)$$

式 (29)(32) から z_1, z_4 の近似解は次のように求められる。

$$z_1 = a_1 f_1 \left(\frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2} \cos \omega t \right) \quad (33)$$

$$z_4 = a_2 f_2 \left(\frac{2\omega}{4\omega^2 + \alpha^2} \sin 2\omega t + \frac{\alpha}{4\omega^2 + \alpha^2} \cos 2\omega t \right) \quad (34)$$

式 (27) に式 (33)(34) を代入し、微小項を無視すると z_3 の近似解は次のように与えられる。

$$z_3 = a_1 a_2 f_1 f_2 \left(\frac{\alpha^2 - 2\omega^2}{6k} \sin 3\omega t - \frac{\alpha\omega}{2k} \cos 3\omega t + \frac{\alpha^2 + 2\omega^2}{2k} \sin \omega t + \frac{\alpha\omega}{2k} \cos \omega t \right) \quad (35)$$

ただし、

$$k = (\omega^2 + \alpha^2)(4\omega^2 + \alpha^2)$$

式 (33)(34)(35) を式 (28) に代入し、周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ で平均化し、微小項を無視すると次のようになる。

$$\dot{z}_2 = k_1 f_1^2 f_2 + k_2 a_1^2 a_2^3 f_1^2 f_2^3 \quad (36)$$

ここに、

$$k_1 = a_1^2 a_2 \frac{\omega^4}{2(\omega^2 + \alpha^2)^2 (4\omega^2 + \alpha^2)}$$

$$k_2 = a_1^2 a_2^3 \frac{\alpha^4 + 3\alpha^2 \omega^2 + 16\omega^4}{8(\omega^2 + \alpha^2)^3 (4\omega^2 + \alpha^2)^2}$$

関数 $f_1(z_2), f_2(z_2)$ を次のように設定する。

$$f_1 = \sqrt{|z_2|} \quad (37)$$

$$f_2 = -\tanh \frac{z_2}{\delta} \quad (38)$$

但し、 δ は微小な定数

この時、 $|z_2| > O(\delta)$ の領域では、 z_2 は z_{20} を定数として次のように近似的に表される。

$$z_2 = z_{20} \exp[-(k_1 + k_2)t] \quad (39)$$

また、 $|z_2| < O(\delta)$ の領域では、 $|z_2|$ は次のようになる。

$$|z_2| = \frac{2}{\frac{k_1^2 \delta}{k_2} t + C + \sqrt{\left(\frac{k_1^2 \delta}{k_2} t + C\right)^2 - \frac{4k_1 \delta^2}{k_2}}} \quad (40)$$

以上より、 z_1, z_2, z_3, z_4 は 0 に収束する。また、原点近傍では z_2 は $O(\delta)$ の領域まで指数的に 0 に近づき、 z_1, z_3, z_4 は振動しながら 0 に収束する。よって、制御則 u , 式 (24) によって状態変数 z は $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束することが示された。

4 数値例

3 節の解析結果を数値シミュレーションによって確認する。各パラメータは次のようにとった。

$$\alpha = 1.0, \beta = 0.01, a_1 = a_2 = 2.0, \omega = 1.0, \delta = 10^{-6}$$

初期値は、

$$\text{場合 1: } z_0^T = [0.0 \ 1.0 \ 0.0 \ 0.01]^T$$

$$\text{場合 2: } z_0^T = [0.0 \ 1.0 \ \pi \ 0.01]^T$$

とした。場合 1 は u_1 だけでは動けない点を初期値にとり、場合 2 では、Chained form 変換における適用限界からはずれた点を初期値にとった。

場合 1 におけるシミュレーション結果と 3.4 節で求めた近似解との比較を図 2 に示す。 z_1, z_2, z_3 はすばやく 0 に収束する。 z_4 の収束は遅いが、 z_4 に対応する変数はステアリング角 ϕ であるので、四輪移動車の位置および姿勢が目標に達していれば、実際上問題はないと考える。また、場合 1 および場合 2 における $x-y$ 平面上の四輪移動車の動きを図 3, 図 4 にそれぞれ示す。場合 1, 場合 2 とともに、四輪移動車は数回の切り返しの後に目標点に到達することがわかる。

5 まとめ

四輪移動車について、状態変数を四輪移動車の位置、姿勢、ステアリング角にとり、制御入力を四輪移動車の速度とステアリング角の変化率にとって、これらの変数を支配する方程式系を導出した。次に、これに適用限界が生じないような変換を施して、制御のための基礎式を導き、このシステムに対して、四輪移動車を目標の位置および姿勢に制御するような制御入力设计了。制御入力は、リアプノフ関数の勾配とその勾配に反対称な行列をかけたもののでつくられる拡張リアプノフ法によるものと、時変フィードバック入力とからなる。このようにして設計された制御則による系の振る舞いを、解析および数値シミュレーションによって確認し、制御則が有効なものであることを示した。今後、ハードウェアによる実験を予定している。

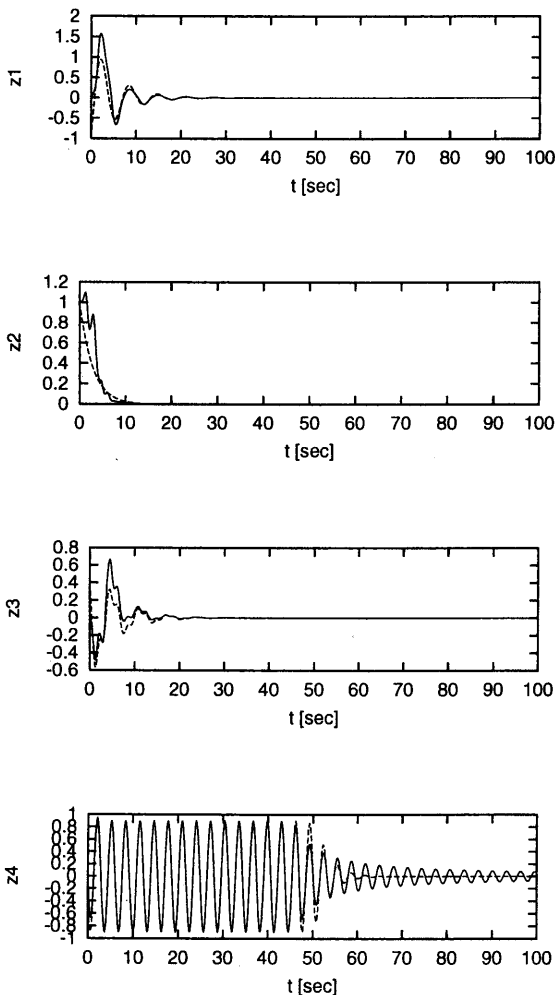


図 2: 状態変数の時間履歴 (場合 1; 実線: シミュレーション結果, 破線: 近似解)

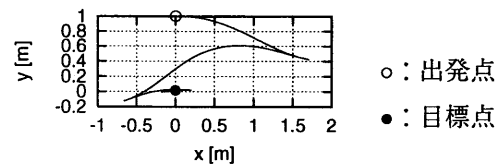


図 3: $x-y$ 平面における 4 輪車の動き (場合 1)

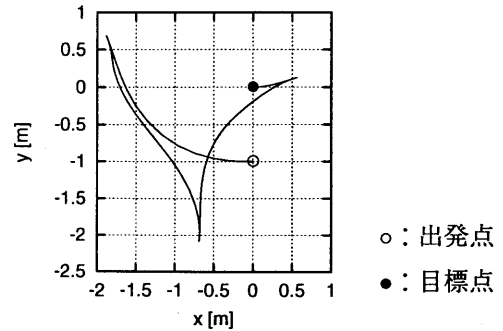


図 4: $x-y$ 平面における 4 輪車の動き (場合 2)

参考文献

- [1] R. W. Brockett: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, *Differential Geometric Control Theory-Progress in Mathematics*, **27**, 181/191, Springer-Verlag (1983)
- [2] 中村 仁彦: 非ホロノミックロボットシステム, 講座全 5 回, 日本ロボット学会誌, **11-4**~**7**, **12-2**, (1993~1994)
- [3] 三平 満司: 非ホロノミック系のフィードバック制御, 解説, 計測と制御, **36-6**, 396/403 (1997)
- [4] J. B. Pomet: Explicit Design of Time-varying Stabilizing Control Laws for a Class of Controllable Systems without Drift, *System and Control Letters*, **18**, 139/145 (1992)
- [5] R. M. Murray and S. S. Sastry: Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38-5**, 700/716 (1993)
- [6] C. Samson: Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40-1**, 64/77, (1995)
- [7] A. Astolfi: Exponential Stabilization of a Car-like Vehicle, *International Conference on IEEE Robotics and Automation*, 1391/1396 (1995)
- [8] K. Tsuchiya, T. Urakubo and K. Tsujita, A Feedback Control for a Class of Non-holonomic System, *Proc. 7th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics*, ISAS, 56/61 (1997)