

非線形振動子系にもとづく組合せ最適化問題の解法

○西山岳宏[†], 土屋和雄[‡], 辻田勝吉[‡]

[†]三菱電機 先端技術総合研究所

[‡]京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻

An Algorithm for a Combinatorial Optimization Problem Based on Nonlinear Oscillators

○Takehiro Nishiyama[†], Kazuo Tsuchiya[†], Katsuyoshi tsujita[‡]

[†]Advanced Technology R&D Center, Mitsubishi Electric Corporation

[‡]Dept. of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Abstract: In this paper, we propose an algorithm for a combinatorial optimization problem based on a dynamical system composed of nonlinear oscillators (oscillator model). The proposed model has phase patterns corresponding to all feasible solutions of the optimization problem as stable states. Based on the characteristics of the proposed model, an optimization algorithm is proposed and applied to the Quadratic Assignment Problem (QAP). It is shown that the proposed algorithm can obtain solutions equivalent to the best known solutions for large scale problems in short time.

1 はじめに

本研究は、組合せ最適化問題の中でも特に難しいといわれる2次割当問題 (Quadratic Assignment Problem; QAP)¹⁾ に対して、力学系にもとづいた解法を提案するものである。サイズ N の QAP の解は、 $N \times N$ の置換行列によって表される。従来、力学系にもとづく QAP の解法では、 $N \times N$ の置換行列に対して $N \times N$ の連続変数を用い、それらに対する力学系を QAP の評価指標と制約条件をもとに構成していた^{2, 3, 4)}。この場合、QAP の解は、力学系の各変数の値が 0 または 1 をとるような安定平衡解として求められる。本研究では、それらとは異なり、非線形振動子を要素とする力学系のモデル (振動子モデル) を提案する。すなわち、1つのベースメーカーとなる振動子を設定し、ベースメーカーからの周期入力を受ける $N \times N$ 個の非線形振動子を要素とした力学系を構成する。各振動子のベースメーカーとの位相差が逆相か同相かによって、0 か 1 に対応させることで、振動子系の位相のパターンによって QAP の解を表現することができる。本研究では、振動子間の相互作用を QAP の評価指標と制約条件をもとに適切に設定し、振動子に対する力学系を構成する。そして、構成された力学系において、ベースメーカーとの位相差の振る舞いを示す力学系を抽出することで、QAP の解に対応した位相差のパターンの安定性を解析する。QAP の解に対応した位相パターンは、系に含まれるコントロールパラメータを増加させた時、その評価指標値の小さいものから順に逐次的に安定化することが示される。そこで、パラメータを適切に設定することで、良い近似解に対応した位相パターンのみを安定に存在させることが可能であ

る。本研究では、そのような振動子モデルの性質にもとづき、マルコフ連鎖モンテカルロ法と組み合わせたアルゴリズムを提案し、その性能を検証する。そして、QAP の大規模な問題例に適用した結果、現在までに得られている最良解とほぼ同等な性能を持つ解を非常に高速に求め得ることが示される。

2 2次割当問題 (QAP)

2次割当問題 (Quadratic Assignment Problem; QAP)¹⁾ は、組合せ最適化問題の中でも特に難しいとされる問題の1つである⁵⁾。QAP は集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ と $N \times N$ 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{kl})$ により、次のように表される。

$$\min_{p \in \Pi_N} L(p) \quad (1)$$

$$L(p) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{p(i)p(j)} \quad (2)$$

ここで、 Π_N は \mathcal{N} のすべての順列からなる集合であり、 p はその要素を表す。 $N \times N$ の置換行列の集合を $\Pi_{N \times N}$ と表し、その要素を $X = (x_{ij})$ とすれば、QAP は次のように行列形式で表すことができる。

$$\min_{X \in \Pi_{N \times N}} L(X) \quad (3)$$

$$L(X) = \text{trace}(A^T X^T B X) = \sum_{i,i',j,j'} a_{jj'} b_{ii'} x_{ij} x_{i'j'} \quad (4)$$

QAP の典型的な応用例としては施設配置問題がある; N 個の施設を N 個の地点に配置することを考える。ここで、 a_{ij} は施設 i から施設 j への物資の輸送量を表し、 b_{kl} は地点 k から地点 l への距離を表す。施設 i を地点

k に、施設 j を地点 l に配置したときの輸送コストは $a_{ij}b_{kl}$ となる。問題の目的は総輸送コストを最小にするような、すべての施設のすべての地点への配置を求めることである。

3 振動子モデル

QAP に対し、複素変数 $u_{ij}(i, j = 1, \dots, N)$ に対する以下のような力学系を考える。

$$\dot{u}_{ij} = \omega_{ij}u_{ij} + \mu(1 - u_{ij}^*u_{ij})u_{ij} + k_{ij}u_0 \quad (5a)$$

$$k_{ij} = (u_{ij}^*u_{ij})^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2}C(u_0, u_{ij}) - \frac{\alpha_0}{4} \left[\sum_{i' \neq i} C(u_0, u_{i'j}) + \sum_{j' \neq j} C(u_0, u_{ij'}) \right] - \frac{\alpha_1}{4} \sum_{i', j'} (a_{jj'}b_{ii'} + a_{j'j}b_{i'i})C(u_0, u_{i'j'}) \quad (5b)$$

$(i, j = 1, \dots, N)$

ここで、 $\mu > 0, \gamma > 1, \alpha_0 > 0, 0 \leq \alpha_1 \ll 1$ 。また、 $*$ は複素共役を表し、

$$u_0 = r_0 e^{i\omega_0 t} : \text{pacemaker} \quad (6)$$

$$C(u_0, u_{ij}) = \frac{1}{2}(u_0^*u_{ij} + u_{ij}^*u_0) + (u_{ij}^*u_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

である。 $C(u_0, u_{ij})$ は、ペースメーカーとのある種の内積を表し、ペースメーカーと同期している時、その値は大きくなる。振動子は、ペースメーカーからの入力を介して相互作用している。

$u_{ij} = r_{ij}e^{i(\omega_0 t + \theta_{ij})}$ とおき、整理すると

$$\dot{r}_{ij} = \mu(1 - r_{ij}^2)r_{ij} + \left\{ r_{ij} - \frac{\gamma}{2}r_{ij}C(\theta_{ij}) - \frac{\alpha_0}{4} \left[\sum_{i' \neq i} r_{i'j}C(\theta_{i'j}) + \sum_{j' \neq j} r_{ij'}C(\theta_{ij'}) \right] - \frac{\alpha_1}{4} \sum_{i', j'} (a_{jj'}b_{ii'} + a_{j'j}b_{i'i})r_{i'j'}C(\theta_{i'j'}) \right\} r_0 \cos \theta_{ij} \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_{ij} = \omega_{ij} - \omega_0 - \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2}C(\theta_{ij}) - \frac{\alpha_0}{4} \left[\sum_{i' \neq i} \frac{r_{i'j}}{r_{ij}}C(\theta_{i'j}) + \sum_{j' \neq j} \frac{r_{ij'}}{r_{ij}}C(\theta_{ij'}) \right] - \frac{\alpha_1}{4} \sum_{i', j'} (a_{jj'}b_{ii'} + a_{j'j}b_{i'i}) \frac{r_{i'j'}}{r_{ij}}C(\theta_{i'j'}) \right\} r_0 \sin \theta_{ij} \quad (9)$$

$$(C(\theta) = 1 + r_0 \cos \theta)$$

を得る。ここで、 u_{ij} の振幅 r_{ij} に対する方程式 (8) においてパラメータ μ を十分大きくとると、第 1 項が支配的となり、 $r_{ij} \approx 1$ が常に成り立つことが予想される。そこで $r_{ij} \equiv 1$ とし、また、 $\omega_{ij} = \omega_0, r_0 = 1$ とすると各要素 u_{ij} のペースメーカーとの位相差 θ_{ij} に対する方程式 (9) は

$$\dot{\theta}_{ij} = -f_{ij} \sin \theta_{ij} \quad (10a)$$

$$f_{ij} = 1 - \frac{\gamma}{2}(1 + \cos \theta_{ij}) - \frac{\alpha_0}{4} \left[\sum_{i' \neq i} (1 + \cos \theta_{i'j}) + \sum_{j' \neq j} (1 + \cos \theta_{ij'}) \right] - \frac{\alpha_1}{4} \sum_{i', j'} (a_{jj'}b_{ii'} + a_{j'j}b_{i'i})(1 + \cos \theta_{i'j'}) \quad (10b)$$

となる。すなわち、 μ が大きい場合、位相差 θ_{ij} の振る舞いは (10) により記述される。以下では、位相差方程式 (10) について解析を行う。

4 振動子モデルの性質

位相差方程式 (10) の平衡解は、もとの方程式 (5) の定常周期解に対応する。すなわち、ペースメーカーと同期して振動していることに対応する。よって、以下、位相差方程式 (10) の平衡解について解析を行い、ペースメーカーとの同期パターンの安定性を調べる。

4.1 平衡解とその安定性

振動子モデル (10) の平衡解を $\bar{\theta}_{ij} (i, j = 1, \dots, N)$ とあらわすと、 $\bar{\theta}_{ij}$ は次式を満たす：

$$\begin{cases} \bar{f}_{ij} \equiv f_{ij}(\bar{\theta}_{i'j'}, \alpha_0, \alpha_1) = 0 & ((i, j) \in \Gamma) \\ \sin \bar{\theta}_{ij} = 0 & ((i, j) \notin \Gamma) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、添え字 $(i, j) (i, j = 1, \dots, N)$ の集合 Γ は次のように定義される。

$$\Gamma = \{(i, j) \mid \sin \bar{\theta}_{ij} \neq 0; i, j = 1, \dots, N\} \quad (12)$$

ここで、 $(i, j) \notin \Gamma$ の要素は $\bar{\theta}_{ij} = (2n+1)\pi$ または $2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を満たすが、 $\bar{\theta}_{ij} = 2n\pi$ のときはその平衡解近傍で方程式 (10) を線形化すると、その要素に対して

$$\delta \dot{\theta}_{ij} = -(1 - \gamma - (\text{non-negative value}))\delta \theta_{ij} \quad (13)$$

となることから、 $\gamma > 1$ であれば他の要素の値に関わらず、そのような平衡解は不安定であることがわかる。よって、以下では $\bar{\theta}_{ij} \neq 2n\pi$ (つまり、 $(i, j) \notin \Gamma \Leftrightarrow \theta_{ij} = (2n+1)\pi \Leftrightarrow (1 + \cos \theta_{ij})/2 = 0$) とする。

振動子モデル (10) の平衡解は次のように分類するこ

とができる。

$$\begin{cases} \text{(a) 一様解 } \Theta = \Theta^0 & : \Gamma = \Gamma^0 \\ \text{(b) 遷移解 } \Theta = \Theta^t & : \Gamma = \Gamma^t \\ \text{(c) 許容解 } \Theta = \Theta^{(p)} & : \Gamma = \Gamma^p \ (p \in \Pi_N) \end{cases} \quad (14)$$

ここで

$$\Gamma^0 = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, N\} \quad (15)$$

$$\Gamma^p = \{(i, j) \mid i = p(j); j = 1, \dots, N\} \ (p \in \Pi_N) \quad (16)$$

$$\Gamma^t \neq \Gamma^0, \Gamma^p \ (\forall p \in \Pi_N) \quad (17)$$

一様解 Θ^0 は、全ての要素が $\sin \theta_{ij} \neq 0$ を満たす平衡解である。また、許容解 $\Theta^{(p)}$ は、それぞれが置換行列 $X^{(p)} \in \Pi_{N \times N}$, すなわち QAP の解に対応する。

置換行列 $X^{(p)} \in \Pi_{N \times N}$ に対応した許容解 $\Theta^{(p)}$ の安定条件は、近似的に次のように与えられる (付録参照)。

$$\alpha_0 > \gamma + \frac{\alpha_1}{N-1} (L(X^{(p)}) - \bar{L}) \quad (18)$$

\bar{L} : constant

安定条件 (18) は、許容解に対応する評価指標の値の小さいものから順に安定化することを示している。すなわち、振動子モデルにおいてはコントロールパラメータ α_0 を適切に設定することで、性能のよい許容解のみが得られる。次節で安定条件 (18) を数値的に検証する。

4.2 数値解析

ここでは、QAPLIB⁶⁾ に含まれる $N = 20$ の問題例 “Nug20” を用いて、安定条件 (18) を数値的に検証する。まず、 γ を固定し、 α_0, α_1 の様々な値において、力学系 (10) に多くのランダムな初期値を与えて計算を行い、得られた許容解 $\Theta^{(p)}$ に対する評価指標の値 $L(X^{(p)})$ を求めた。Fig. 1 は α_0, α_1 のそれぞれの値に対する得られた評価指標の平均値を、 $(\alpha_0 - \gamma)/\alpha_1$ に対してプロットしたものである。振動子モデルによって得られる許容解に対する評価指標の値は、 $(\alpha_0 - \gamma)/\alpha_1$ の値にほぼ比例しており、これは安定条件 (18) と定性的に一致する。次に、 γ, α_1 を固定し、 $\alpha_0 = \gamma + 0.01, \gamma + 2.0$ のそれぞれの場合において、力学系 (10) に 1000 通りのランダムな初期値を与えて計算を行った。得られた許容解の性能の分布をそれぞれ Figs. 2 (a), (b) に示す。コントロールパラメータ α_0 の値を小さく設定することで、性能の良い許容解のみが得られていることがわかる。

5 振動子モデルにもとづくマルコフ連鎖モンテカルロアルゴリズム

前節で示された振動子モデルの性質にもとづき、性能の良い解を効率的に求めるためのアルゴリズムとして、

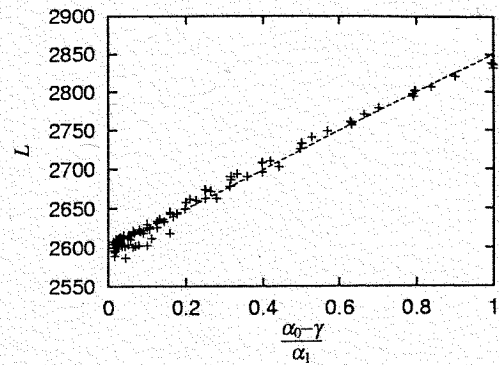
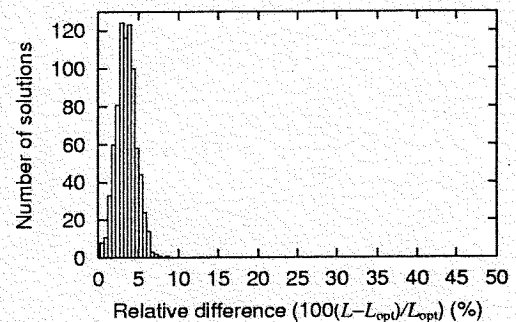
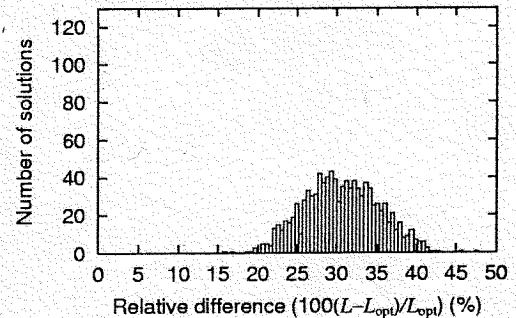


Fig. 1 The mean values of L against the values of $\frac{\alpha_0 - \gamma}{\alpha_1}$. The dashed line is the linear interpolation



(a) $\alpha_0 = \gamma + 0.01$



(b) $\alpha_0 = \gamma + 2.0$

Fig. 2 Distribution of the feasible solutions. L_{opt} is the optimal value of L

以下のようなマルコフ連鎖モンテカルロアルゴリズムを提案する。

まず、探索空間を次のように構成する；与えられた QAP に対し、力学系 (10) を構成する。力学系において評価指標値の小さい置換行列 $X^{(p)}$ に対応した許容解 $\Theta^{(p)}$ のみ安定となるよう、コントロールパラメータ α_0 を γ に近い値に設定する。探索空間はこれらの許容解により構成される。次に、置換行列 $X^{(p_n)}$ に対応した現在

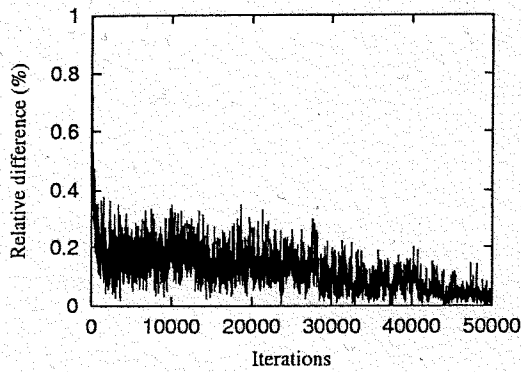


Fig. 3 Change of the performance index value in the proposed algorithm for "Wil100". The vertical axis is the relative difference from the best known value

の解 $\Theta^{(p_n)}$ に対し、新たな解 $\Theta^{(p_{n+1})}$ を現在の解の 'M-近傍' において求める; 行列 Θ において、 M 個の行と列をランダムに選ぶ。対応する要素 θ_{ij} にランダムな初期値を与え、力学系 (10) を計算する。このとき、その他の要素は $\Theta^{(p_n)}$ における値に固定する。このようにして、次の解 $\Theta^{(p_{n+1})}$ および、対応する置換行列 $X^{(p_{n+1})}$ が求められる。求められた解に対して、'2-opt 法' と呼ばれる局所探索法を適用する。2-opt 法は単純なヒューリスティックであり、解が '2-近傍' における局所最小となるように少し変化させる。このようにして求められた新たな解 $X^{(p_{n+1})}$ は、メトロポリス法⁷⁾ にもとづいて採択される; 評価指標値が解の変化に伴って減少する場合は、新たな解を採用し、増加する場合にも、増加量 ΔL に応じた確率 $\exp(-\Delta L/T)$ で採用する。温度と呼ばれるパラメータ T はアルゴリズムの各ステップにおいて $b (< 1)$ を乗じることで、少しずつ減少させる。

提案アルゴリズムの過程を Algorithm 1 にまとめて示す。

6 数値実験

本節では、QAPLIB⁶⁾ に含まれるいくつかの大規模な問題例を用いて数値実験を行う。

Fig. 3 は、問題例 "Wil100" ($N = 100$) に対する結果の一例である。用いたパラメータの値は $M = 10$, $\alpha_0 = \gamma + 0.01$, $\alpha_1 = 0.003$, $b = 0.99995$, $n_{\max} = 50000$, $T_0 = 300.0$ である。アルゴリズムの過程において、評価指標の値は徐々に減少し、この場合は、この問題に対して知られている最良値が得られた。

QAPLIB の大規模な問題例 "Sko90" ($N = 90$), "Sko100a", "Sko100b", "Sko100f", "Tai100a", "Wil100" ($N = 100$), "Tho150" ($N = 150$) を用いて、提案アルゴリズムの性能の検証を行った。結果を

Algorithm 1 Markov chain Monte Carlo algorithm based on the oscillator model

- 1: construct the dynamical system (10) for the given QAP instance
- 2: $\alpha_1 :=$ small value
- 3: $L_{\min} := \infty$
- 4: $M :=$ size of the neighborhood
- 5: $T_0 :=$ initial temperature
- 6: $X^{(p_0)} :=$ initial permutation matrix
- 7: $\alpha_0 := \gamma + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1$)
- 8: **for** $n = 0$ to n_{\max} **do**
- 9: **repeat**
- 10: choose M rows and columns randomly in the matrix Θ
- 11: give random initial values to the corresponding $M \times M$ elements θ_{ij} where the rest of the elements are fixed to the values of $\Theta^{(p_n)}$
- 12: calculate Eq. (10) to obtain the equilibrium solution $\Theta^{(p_{n+1})}$
- 13: **until** a feasible solution ($\Theta^{(p_{n+1})} \leftrightarrow X^{(p_{n+1})}$) is obtained
- 14: apply 2-opt method to $X^{(p_{n+1})}$
- 15: **if** $L(X^{(p_{n+1})}) < L_{\min}$ **then**
- 16: $L_{\min} = L(X^{(p_{n+1})})$, $X_{\min} = X^{(p_{n+1})}$
- 17: **end if**
- 18: $\Delta L = L(X^{(p_{n+1})}) - L(X^{(p_n)})$
- 19: **if** $\Delta L > 0$ **then**
- 20: generate a random value $r \in [0, 1]$
- 21: **if** $r > e^{-\Delta L/T_n}$ **then** {rejected}
- 22: $X^{(p_{n+1})} := X^{(p_n)}$, $\Theta^{(p_{n+1})} := \Theta^{(p_n)}$
- 23: **end if**
- 24: **end if**
- 25: $T_{n+1} = b \cdot T_n$ ($b < 1$)
- 26: **end for**
- 27: output X_{\min} and L_{\min}

表 1 に示す。表の 3 列目は 10 回の試行で得られた評価指標の最小値であり、4 列目は平均値 (標準偏差) を示している。ここで、それぞれの値は各問題例に対して現在までに知られている最良解からの差をパーセントで示している。これら 7 つの問題例のうち、5 つの問題例に対して、最良解と全く同じ評価指標値を持つ解が得られている。さらに、これらの解に対する置換行列は QAPLIB に掲載されているものとは異なっていた。その個数を表の最後の列に示している。以上の結果から、提案アルゴリズムはこれまでに提案されている QAP に

Table 1 Performance of the proposed algorithm

Name	N	Min. (%)	Mean (std.) (%)	#(best)
Sko90	90	0	0.030 (0.042)	5/10
Sko100a	100	0	0.019 (0.024)	4/10
Sko100b	100	0	0.0070 (0.010)	1/10
Sko100f	100	0	0.047 (0.041)	1/10
Tai100a	100	0.071	0.21 (0.11)	0/10
Wil100	100	0	0.0056 (0.0076)	2/10
Tho150	150	0.0027	0.090 (0.055)	0/10

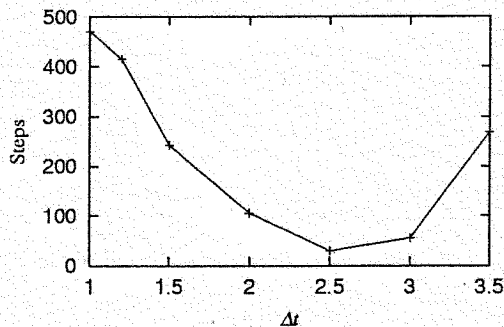


Fig. 4 Mean of the iterations of the time integration at each iteration of the proposed algorithm as a function of the time step Δt

対する解法と比べても、非常に性能が良いものであることがわかる。

次に、計算時間について考える。振動子モデルにおいては、変数が周期的であるため、力学系の時間積分(前進オイラー法)のステップ幅を大きくとっても発散しない。Fig. 4は、ステップ幅 Δt を変えたときの、アルゴリズムの各ステップ n において許容解 $\Theta^{(p_n)}$ が得られるまでの積分ステップの平均値を示す。 $\Delta t > 2.5$ でステップ数が増加しているのは、ステップ幅が大きすぎて丸め誤差の影響が無視できなくなっていることによる。実際、 $\Delta t \geq 2.5$ では、変数 θ_{ij} の値が $-\pi < \theta_{ij} < \pi$ の範囲を超えて変化することがあった。一方、Fig. 5はアルゴリズムの10回の試行における評価指標の平均値、標準偏差と最小値を表す。 $\Delta t < 2.5$ では、得られる解の性能にあまり変化はない。そこで、実際の計算では $\Delta t = 2.0$ と、比較的大きなステップ幅を用いることで、アルゴリズムの1回の試行にかかる実計算時間は $N = 100$ の問題でも30分程度(COMPAQ AlphaStation XP900上)と非常に高速に計算が行われる。

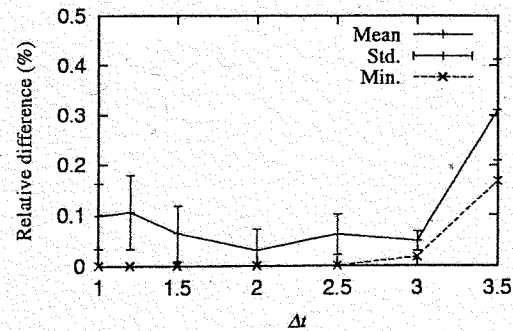


Fig. 5 Mean, standard deviation and minimum of the values of the performance index (relative difference from the best known value) as a function of the time step Δt

7 まとめ

本研究では、非線形振動子系を用いた組合せ最適化問題の解法を提案した。提案する力学系においては、QAPの解に対応する位相のパターンが、力学系に含まれるコントロールパラメータの値を増加させると、評価指標の値の小さいものから順に逐次的に現れることが理論解析、および数値解析により示された。この性質をもとに、マルコフ連鎖モンテカルロ法にもとづくアルゴリズムを提案した。QAPLIBのいくつかの大規模な問題例に適用した結果、現在までに得られている最良解と同等な性能の解を、非常に高速に求め得ることが示された。

参考文献

- 1) Pardalos, P. M., Rendl, F. and Wolkowicz, H.: The Quadratic Assignment Problem: A Survey and Recent Developments, in Pardalos, P. and Wolkowicz, H. eds., *Quadratic Assignment and Related Problems*, Vol. 16 of DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pp. 1-42, American Mathematical Society (1994).
- 2) Rangarajan, A., Gold, S. and Mjolsness, E.: A Novel Optimizing Network Architecture with Applications, *Neural Computation*, Vol. 8, pp. 1041-1060 (1996).
- 3) Ishii, S. and Sato, M.: Constrained Neural Approaches to Quadratic Assignment Problems, *Neural Networks*, Vol. 11, pp. 1073-1082 (1998).
- 4) Ishii, S. and Niitsuma, H.: λ -opt Neural Approaches to Quadratic Assignment Problems, *Neural Computation*, Vol. 12, pp. 2209-2225 (2000).
- 5) Sahni, S. and Gonzalez, T.: P-Complete Approx-

- ination Problems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 23, pp. 555-565 (1976).
- 6) Burkard, R. E., Karisch, S. and Rendl, F.: QAPLIB - A Quadratic Assignment Problem Library, *Journal of Global Optimization*, Vol. 10, pp. 391-403 (1997), Updated version: <http://www.imm.dtu.dk/~sk/qaplib/>.
- 7) Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. and Teller, E.: Equation of state calculation by fast computing machines, *Journal of the Chemical Physics*, Vol. 21, pp. 1087-1092 (1953).
- 8) 土屋和雄, 西山岳宏, 辻田勝吉: 分岐特性を用いた組合せ最適化問題の近似解法, 第10回自律分散システムシンポジウム資料, pp. 235-238 (1998).

付録 許容解の安定条件 (18) の導出

$\alpha_1 \ll 1$ より, 許容解 $\Theta^{(p)}$ は近似的に次のように求められる.

$$\frac{1 + \cos \bar{\theta}_{ij}}{2} = \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 - \frac{\alpha_1}{2\gamma} \sum_{j'} (a_{jj'} b_{ip(j')} + a_{j'j} b_{p(j')i}) \right\} \quad ((i, j) \in \Gamma^p) \quad (19)$$

$\theta_{ij} = \bar{\theta}_{ij} + \delta\theta_{ij}$ とおき, (10) 式を $\delta\theta_{ij}$ について線形化すると次式を得る.

$$\delta\dot{\theta}_{ij} \simeq -\frac{\gamma}{2} \delta\theta_{ij} \quad ((i, j) \in \Gamma^p) \quad (20)$$

$$\delta\dot{\theta}_{ij} \simeq \bar{f}_{ij} \delta\theta_{ij} \quad ((i, j) \notin \Gamma^p) \quad (21)$$

よって, 許容解の安定条件は次式で与えられる.

$$\bar{f}_{ij} < 0 \quad ((i, j) \notin \Gamma^p) \quad (22)$$

(19) を (22) に代入し, $(i, j) \notin \Gamma^p$ について平均をとると, 次式を得る.

$$\alpha_0 > 1 + \frac{\alpha_1}{N-1} (L(X^{(p)}) - \bar{L}(X^{(p)})) \quad (23)$$

$$\bar{L}(X^{(p)}) = \frac{1}{2N} \sum_{i,j,j'} (a_{jj'} b_{ip(j')} + a_{j'j} b_{p(j')i}) \quad (24)$$

ここで, $X^{(p)}$ は許容解 $\Theta^{(p)}$ に対応した置換行列である. $\bar{L}(X^{(p)})$ は $X^{(p)}$ の関数であるが, 解によってあまり変化せず, ほぼ一定値とみなせることが示されている⁸⁾. よって, (18) 式を得る.