論　文

対称性を有する区分的アファインシステムにおけるリミットサイクルの解析

足立　正和†　　山本　茂†　　潮　俊光†

Computation of Limit Cycles in Piecewise Affine Systems with a Symmetry

Masakazu ADACHI†, Shigeru YAMAMOTO†, and Toshimitsu USHIO†

あらまし　リミットサイクルは非線形システムに見られる代表的な現象の一つである．リプシッツ連続な微分方程式に表れるリミットサイクルは，一般に滑らかであるが，例えば，二足歩行ロボットの歩行軌道などにおいては，滑らかでないリミットサイクルが生じる．ハイブリッドシステムでは，離散状態の変化に伴いベクトル場が不連続な変化を生じ，結果として滑らかでない軌道が生成されるため，上述のようなリミットサイクルが発生する可能性がある．しかし，ハイブリッドシステムに生じるリミットサイクルの求解や安定解析は，煩雑な連立方程式を解く必要があり，非常に困難なものとなる．そこで本論文では，ハイブリッドシステムの代表的なサブクラスである区分的アファインシステムに注目し，システムにある種の対称性があるとき，リミットサイクルの求解法を提案し，さらにその安定条件を導出する．

キーワード　区分的アファインシステム，ハイブリッドシステム，リミットサイクル

1. まえがき

ハイブリッドシステムとは，連続値変数系と離散値変数系という異なる 2 つのタイプの動特性が混在しているシステムである．一般的に，ハイブリッドシステムの軌道は連続状態と離散状態が互いに影響を及ぼし合いながら発展する．離散状態がある値 (又はシンボル) を保っている時，連続状態はその離散状態に依存した微分方程式に従い，連続状態がある条件を満足すると離散状態の遷移が起こる．多くの物理現象や工学システム等は，ハイブリッドシステムとして記述可能であり，その記述範囲は非常に広く，コンピュータ科学やシステム制御の分野で盛んに研究が行われている [1].

ハイブリッドシステムの安定解析においては，従来の Lyapunov の方法が適用できず，近年様々な Lyapunov の方法を拡張した安定解析法が提案されている [2]〜[5]．しかし，ハイブリッドシステムのようないくつかのダイナミクスが混在しているシステムでは，システム全体として平衡点を持つ（全てのサブシステムの平衡点が一致する）場合というのは非常に珍しく，結果としてリミットサイクルを発生する場合が十分考えられる．このような軌道の解析・設計は工学的な立場から見ても応用範囲が広く，ロボットの軌道計画問題や，生産システムのパフォーマンス向上など多岐にわたる [6].

しかしハイブリッドシステムにおけるリミットサイクルはその性質上，一般に滑らかでなく，時間が陽に表れ，通常の微分方程式に表れるものとは違いその枠組みが少し異なるため問題を複雑にしている．これまでの研究では，スイッチトサーバシステムに対するリミットサイクルの存在性と安定性 [7], [8]，リレーフィードバックシステム，ON-OFF スイッチシステムに対する，ポアンカレ写像を拡張した大域的な安定解析 [9], [10] などが議論されており，その他にも，連続状態のジャンプを積極的に取り入れたもの [11], [12] や，より一般的なケースに対してはリミットサイクルの代表点を離散時間モデルとして表現し，離散時間

† 大阪大学大学院基礎工学研究科
〒 560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3
Graduate School of Engineering Science, Osaka University
1-3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka 560-8531, Japan

Lyapunov 関数を用いる手法 [13], [14] が提案されている．しかし，リミットサイクルの求解はかなり困難であり，ハイブリッドシステムの代表的なサブクラスである区分的アファインシステムに対しては煩雑な連立方程式を解く必要がある．

本論文ではこの問題に着目し，ある種の対称性を持つ区分的アファインシステムに対してその対称性を利用することで，リミットサイクルを解析的に求めることができ，さらに漸近安定性の判別も容易に行えることを示す．

2. 区分的アファインシステム

本論文では，以下に示す区分的アファインシステムを考える．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{q(t)}x + B_{q(t)} \\ q(t) &\in Q \cup \{\mathtt{idle}\} \quad (Q := \{1, 2, \ldots, M\}) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は連続状態ベクトル，$q(t) \in Q \cup \{\mathtt{idle}\}$ は離散状態，$A_{q(t)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B_{q(t)} \in \mathbb{R}^n$ とする．また各離散状態に対して，$\dot{x} = A_{q(t)}x + B_{q(t)}$ をサブシステムと呼ぶことにする．ここでサブシステム間の切り替え (離散状態の遷移) に対して以下の仮定を設ける．

［仮定 1］ サブシステムの切り替えは瞬時には行われず，既知な idle time $\tau_{\mathtt{id}}$ が経過した後切り替わる．また idle time の間，連続状態は $\dot{x} = A_{\mathtt{id}}x + B_{\mathtt{id}}$（$\mathtt{id}$ は idle を表す）に従う．

(1) の解空間は $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n \times Q$ によって与えられ，実行可能な初期状態 $(x_0, q_0) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ から始まった軌道は，連続状態ベクトル $x(t)$ が $\dot{x} = A_{q(t)}x + B_{q(t)}$ に沿って発展し，離散状態は切り替え集合 $S_{i,j}$ に連続状態 x が含まれたときに遷移する．ここで切り替え集合 $S_{i,j}$ は離散状態 i から j への遷移が生じる集合をあらわし，一般的に超平面によって以下のように与えられ，本論文ではこれを切り替え平面と呼ぶ．

$$S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C_{i,j}x = d_{i,j}\}, \quad i, j \in Q \tag{2}$$

［定義 1］ (1) の解 $(x(t), q(t))$ が以下の 2 つの条件を満足するとき，$(x(t), q(t))$ は well-defined であるという．またこのとき，$\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $(x(t), q(t))$ の切り替えシーケンスと呼ぶ．

(i) $(x(t), q(t))$ は全ての $t \in [0, \infty)$ に対して定義できる．

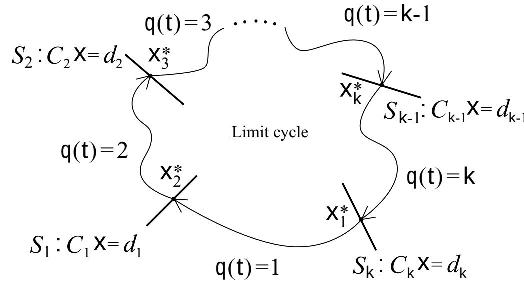

図 1 離散状態の遷移
Fig. 1 Cyclic change of discrete states.

(ii) $t_0 = 0$, $t_{n+1} > t_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ となるような時系列 $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在し，かつ $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ である．

［定義 2］ (1) の解 $(x(t), q(t))$ が well-defined で，かつ，任意の $t \geqq 0$ に対して，$x(t + T) = x(t)$, $q(t + T) = q(t)$ となるような $T > 0$ が存在するとき，$(x(t), q(t))$ は周期解であるという．

［定義 3］ (1) の解 $(x(t), q(t))$ が well-defined で，かつ，周期解であるとき，その十分小さな近傍に別の well-defined な周期解が存在しなければ，$(x(t), q(t))$ はリミットサイクルであるという．

ここで，(1) の解が k 回のサブシステムの切り替えを伴うリミットサイクルであるとき，一般性を失うことなくサブシステムの遷移が図 1 に示すように $1 \to 2 \to \cdots \to k \to 1 \to 2 \to \cdots$ となるようにサブシステムのインデックスを並べ替えることができる．以下，$S_{i,i+1}$ を S_i（$i = 1, \ldots, k-1$），$S_{k,1}$ を S_k と書き，x_i^* はリミットサイクルと切り替え平面 S_i との交点であるとする．このとき，(1) は 1 から k までのサブシステムのみを考えれば十分で，

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i \\ i &\in \mathcal{I} \cup \{\mathtt{idle}\} \quad (\mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, k\}) \end{aligned} \tag{3}$$

としてもよい．

また，あるサブシステム $i \in \mathcal{I}$ において $x_i(t_k)$ から発展する軌道は $\det A_i \neq 0$ を仮定すると

$$x_i(t) = e^{A_i(t-t_k)}x_i(t_k) + \int_{t_k}^{t} e^{A_i(t-\tau)}B_i d\tau \qquad t \in [t_k, t_{k+1}] \tag{4}$$

で与えられることを注意しておく．

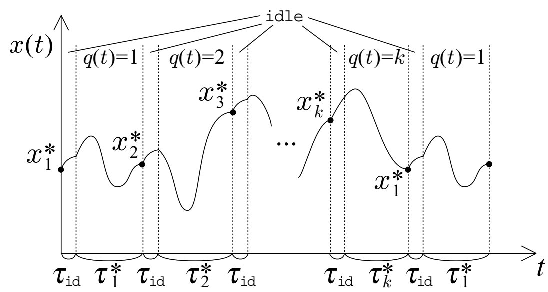

図 2　idle time を伴うリミットサイクル
Fig. 2　Behavior of a limit cycle with idling.

3.　リミットサイクルの求解と存在性

(3) の解が k 回のサブシステムの切り替えを伴うリミットサイクルであると仮定すると，リミットサイクルを求めるためには，以下の連立方程式を x_i^* と τ_i^* について解く必要がある．

$$\begin{cases} x_1^* = \{\mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_k \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_{k-1} \circ \cdots \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_1\}(x_1^*) \\ x_2^* = \{\mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_k \circ \cdots \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_2\}(x_2^*) \\ \qquad\vdots \\ x_k^* = \{\mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_{k-1} \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_{k-2} \circ \cdots \circ \mathcal{F}_{\mathtt{id}} \circ \mathcal{F}_k\}(x_k^*) \end{cases}$$
$$\text{subject to} \quad C_i x_{i+1}^* = d_i, \quad i \in \mathcal{I} \tag{5}$$

ここで，写像 $\mathcal{F}_i$ は (4) より $\mathcal{F}(x_i^*) = x_i(\tau_i^*)$ となる．従って，例えば，

$\det A_i \neq \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I} \cup \{\mathtt{idle}\}$ ならば

$$\mathcal{F}_i(x_i^*) = e^{A_i \tau_i^*}\left(x_i^* + A_i^{-1} B_i\right) - A_i^{-1} B_i \tag{6}$$

$A_i = \mathbf{0}$, $i \in \mathcal{I} \cup \{\mathtt{idle}\}$ ならば

$$\mathcal{F}_i(x_i^*) = x_i^* + B_i \tau_i^* \tag{7}$$

となる．また，τ_i^* は解 $(x(t), q(t))$ がリミットサイクルであるときサブシステム i が駆動している時間間隔である (図 2)．しかし，(5) を解くのは難しく，ここにハイブリッドシステムにおけるリミットサイクルの解析の困難さが現れる．そこで，本論文ではサブシステム間にある対称性を仮定し，そこから x_i^* と τ_i^* について成り立つ定量的な関係を用いて (5) の計算の困難さを緩和する．

本論文では，(3) のサブシステム間において，以下のような関係が満足されていると仮定する．

［仮定 2］　ある整数 $k\,(\geqq 1)$ と $r\,(1 \leqq r \leqq k-1)$ と $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して，$J^k = I$ が成り立ち，(3) のシステム行列 A_i，B_i，$i \in \mathcal{I} \cup \{\mathtt{idle}\}$ に対して，次のような関係が成り立つ．

- $i = \mathtt{idle}$
  $A_{\mathtt{id}} = J^{k-r} A_{\mathtt{id}} J^r, \quad B_{\mathtt{id}} = J^{k-r} B_{\mathtt{id}}$
- $i \in \mathcal{I}$　　(8)
  $A_i = J^{k-r} A_{i-1} J^r, \quad B_i = J^{k-r} B_{i-1},$
  $C_{i,} = C_{i-1} J^r, \quad d_i = d$

ここで，$\mathcal{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を (3) の周期 T のリミットサイクルとし，X^* を $\mathcal{C}(t)$ によって生成される解集合（閉軌道）とする．

$$X^* = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \mathcal{C}(t),\, 0 \leqq t \leqq T\} \tag{9}$$

idle time を考慮して，$x_1^* \in S_k \cap X^*$ から始まった解は $\mathcal{C}(\tau_{\mathtt{id}} + \tau_1^*) = x_2^* \in S_1 \cap X^*$ を満足し，同様に，$\mathcal{C}(\tau_{\mathtt{id}} + \tau_1^* + \tau_{\mathtt{id}} + \tau_2^*) = x_3^* \in S_2 \cap X^*$ となる．サブシステム k においては $\mathcal{C}(\sum_{i=1}^{k}(\tau_{\mathtt{id}} + \tau_i^*)) = x_{k+1}^* = x_1^* \in S_k \cap X^*$ であり，また，$\sum_{i=1}^{k}(\tau_{\mathtt{id}} + \tau_i^*) = T$ である．

このとき，仮定 1 の下で，リミットサイクルと切り替え平面の交点 x_i^* とサブシステム i にとどまり続ける時間 τ_i^* の間に以下のような定理が成り立つ．

［定理 1］　(3) の解 $(x(t), q(t))$ がリミットサイクルであるとき，$x_{i+1}^* = J^{k-r} x_i^*$ を満足することと，全ての離散状態における滞在時間が等しくなること，つまり $\tau_1^* = \tau_2^* = \cdots = \tau_k^* = \tau^*$ であることは等価である．

(証明): 付録参照.

定理 1 を用いるとリミットサイクルの求解が簡単となることを以下に示す．$x_i^* \in S_{i-1} \cap X^*$ に対して x_{i+1}^* は $x_{i+1}^* = J^{k-r} x_i^*$ を満足し，$\tau_1^* = \tau_2^* = \cdots = \tau_k^* = \tau^*$ であることから，$\det A_i \neq 0$ のとき (6) より以下の式が成り立つ．

$$J^{k-r} x_i^* = e^{A_i \tau^*}\left(x_i^* + B_{\mathtt{id}} \tau_{\mathtt{id}} + A_i^{-1} B_i\right) - A_i^{-1} B_i \tag{10}$$

ここでは議論を簡単にするため，idle time におけるダイナミクスは $\dot{x} = B_{\mathtt{id}}$ で与えられると仮定する．このとき (10) から，x_i^* は次のように求めることができる．

$$x_i^* = \left(J^{k-r} - e^{A_i\tau^*}\right)^{-1}\left(e^{A_i\tau^*} - I\right)A_i^{-1}B_i + e^{A_i\tau^*}B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}} \quad (11)$$

しかし，このままでは τ^* が未知であるため，x_i^* は求まらないが，x_i^* は切り替え平面 S_{i-1} 上にあり，$C_{i-1}x_i^* = d_{i-1}$ を満足することから，これに (11) を代入すると，

$$C_{i-1}\left[\left(J^{k-r} - e^{A_i\tau^*}\right)^{-1}\left(e^{A_i\tau^*} - I\right)A_i^{-1}B_i + e^{A_i\tau^*}B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}}\right] - d = 0 \quad (12)$$

となり，(12) から τ_i^*，(11) から x_i^* をそれぞれ求めることができる．さらに，定理 1 から明らかなように (11)，(12) をすべての $i \in \mathcal{I}$ について解く必要はなく，x_i^* については $x_{i+1}^* = J^{k-r}x_i^*$ から漸化的に全て計算でき，τ_i^* $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は全て等しく τ^* となる．$A_{\mathtt{id}} \neq \mathbf{0}$ の場合も，(11) が少し煩雑な形になるが同様の議論ができる．

4. リミットサイクルの安定性

前節までの議論から，ハイブリッドシステムにおけるリミットサイクルは，切り替え平面との交点 x_i^* で特徴付けられることが分かる．故に，その安定性は，ある切り替え平面 S_{i-1} 上の x_i^* からの変動が，1 周期後，再び S_{i-1} に戻ってくるまでのポアンカレ写像を考えることにより調べることが可能である．このとき，ポアンカレ写像のヤコビ行列の全ての固有値が単位円内に存在すれば，リミットサイクルは漸近安定である．

(3) の解がリミットサイクル X^* であると仮定し，図 3 に示すように，$x_i^* + \Delta_i x_i^*$ が $\tau^* + \Delta_i t$ 時間後に $x_{i+1}^* + \Delta_{i+1}x_{i+1}^*$ へ写像されたとする．ここで，$x_i^* + \Delta_i x_i^*$（$x_{i+1}^* + \Delta_{i+1}x_{i+1}^*$）が S_{i-1}（S_i）上に存在するように Δ_i（Δ_{i+1}）を選ぶものとすると，$\Delta_i x_i^*$ と $\Delta_{i+1}x_{i+1}^*$ の関係は以下のように与えられる．

$$\Delta_{i+1}x_{i+1}^* = W_i\Delta_i x_i^* + O(\Delta_i^2)$$
$$W_i := \left\{I - \frac{\left(A_i x_{i+1}^* + B_i\right)C_i}{C_i\left(A_i x_{i+1}^* + B_i\right)}\right\}e^{A_i\tau^*} \quad (13)$$

Δ_i の 2 次の項 $O(\Delta_i^2)$ を無視すると，結局 k 回の切り替えの後 $\Delta_i x_i^*$ は，$W = W_k W_{k-1}\cdots W_2 W_1$ によって写像されるので，W の全ての固有値が単位円内に存在する場合，システムは漸近安定であることが言える．さらに，仮定 1 が成り立つとき，W_i は

$$\begin{aligned} W_i &= \left\{I - \frac{\left(A_i x_{i+1}^* + B_i\right)C_i}{C_i\left(A_i x_{i+1}^* + B_i\right)}\right\}e^{A_i\tau^*} \\ &= J^{k-r}\left\{I - \frac{\left(A_{i-1}x_i^* + B_{i-1}\right)C_{i-1}}{C_{i-1}\left(A_{i-1}x_i^* + B_{i-1}\right)}\right\}e^{A_{i-1}\tau^*}J^r \\ &= J^{k-r}W_{i-1}J^r \end{aligned} \quad (14)$$

と変形することができ，W_i と W_{i-1} の間に漸化的な関係が成り立つ．この関係を用いることにより，W は次のようになる．

$$\begin{aligned} W &= W_k W_{k-1}\cdots W_2 W_1 \\ &= J^{(k-r)(k-1)}W_1 J^{r(k-1)} \;\cdots\; J^{k-r}W_1 J^r \; W_1 \\ &= J^{k(k-r-1)+r}W_1\left(J^r W_1\right)^{k-1} = \left(J^r W_1\right)^k \end{aligned} \quad (15)$$

(15) から分かるように，リミットサイクルが漸近安定となるための十分条件は $(J^r W_1)^k$ の全ての固有値が単位円内に存在することであり，それは，$J^r W_1$ の固有値が単位円内に存在することと等価となる，従って定理 2 を得る．

［定理 2］ (3) の解 $(x(t), q(t))$ がリミットサイクルであるとき，$J^r W_1$ の全ての固有値が単位円内に存在するならば，リミットサイクルは漸近安定である．

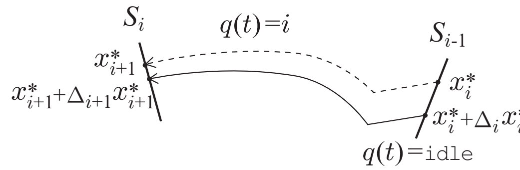

図 3 リミットサイクルの局所安定性
Fig. 3 Local stability of a limit cycle

5. 数 値 例

次のような区分的アファインシステムを考える．

$$J = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.866 \\ 0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \ (J^2 = I), \ r = 1,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & -5 \\ 3.5 & -2 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1.225 & 3.659\\ -4.842 & -2.275\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}1.366\\ -0.366\end{bmatrix},$$

$$A_{\mathtt{id}}=0,\quad B_{\mathtt{id}}=\begin{bmatrix}10\\ 17.320\end{bmatrix},$$

$$S_1=\left\{x\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}x=0\right\},$$

$$S_2=\left\{x\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{bmatrix}0.634 & -3.098\end{bmatrix}x=0\right\}$$

ここで，idle time は $\tau_{\mathtt{id}}=0.1$ とした．(11)，(12) を数値的に解き，$x_{i+1}^*=J^{k-1}x_i^*$ の関係を用いることにより，

$$\tau^*=0.263,\quad x_1^*=\begin{bmatrix}2.247\\ 0.460\end{bmatrix},\quad x_2^*=\begin{bmatrix}-0.725\\ 2.176\end{bmatrix}$$

を得る．また，(13) から JW_1 を計算し，その固有値を調べると

$$JW_1=\begin{bmatrix}0.258 & 0.544\\ 0.053 & 0.111\end{bmatrix},\ \lambda(JW_1)=0\ ,0.369$$

となることから，全ての固有値が単位円内に存在し，このリミットサイクルは漸近安定であることが分かる．シミュレーション結果を図 4 に示す．

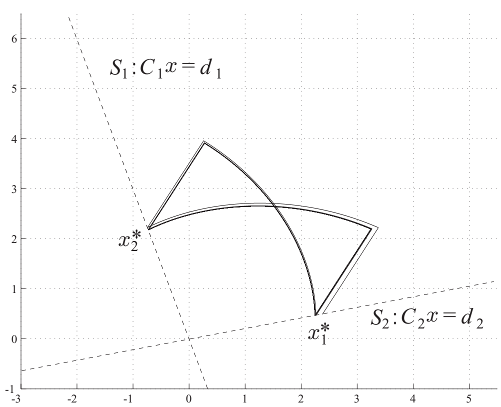

図 4　例題における漸近安定なリミットサイクル
Fig. 4　Asymptotically stable limit cycle of example

6. む　す　び

ある種の対称性を有する区分的アファインシステムに対してはリミットサイクルの求解の煩雑さが緩和され，漸近安定性の判別が容易になることを示し，数値例により有効性を示した．

今後の課題としては，このような性質をうまく用いることによって，所望のリミットサイクルを実現するような区分的アファインシステムを設計することなどが挙げられる．

謝辞　本研究は科学技術振興事業団戦略的基礎研究推進事業の補助のもとに行われた．ここに感謝の意を表す．

文　　献

[1] R. L. Grossman *et al*, “Hybrid Systems,” *Lecture notes in Computer Science*, vol. 736, Springer Verlag, 1993.

[2] M. Johansson and A. Rantzer, “Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 555–559, Oct. 1998.

[3] S. Pettersson and B. Lennartson, “Stability and Robustness for Hybrid Systems,” in *Proc. of 35th CDC*, pp. 1202–1207, 1996.

[4] M. S. Branicky, “Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Swithed and Hybrid Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 475–482, April 1998.

[5] H. Ye, A. N. Micheal, and L. Hou, “Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, pp. 461–474, April 1998.

[6] T. Ushio, H. Ueda and K. Hirai, “Controlling Chaos in a Switched Arrival System,” *System and Control Letters*, vol. 26, pp. 335–339, 1995.

[7] A. V. Savkin and A. S. Matveev, “Cyclic Linear Differential Automata : A Simple Class of Hybrid Dynamical Systems,” *Automatica*, vol. 36, pp. 727–734, 2000.

[8] A. V. Savkin and A. S. Matveev, “Existence and Stability of Periodic Trajectories in Switched Sever Systems,” *Automatica*, vol. 36, pp. 775–779, 2000.

[9] J. M. Gonçalves, A. Megretski, and M. A. Dahleh, “Global Stability of Relay Feedback Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 550–562, April 2001.

[10] J. M. Gonçalves, “Constructive Global Analysis of Hybrid Systems,” Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science , Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[11] I. A. Hiskens, “Stability of Limit Cycles in Hybrid Systems,” in *Proc. of the 34th Hawaii International Conference on System Science*, pp. 1–6, 2001.

[12] I. A. Hiskens, “Stability of Hybrid Systems Limit Cycles: Application to the Compass Gait Biped Robot,” in *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 774–779, Dec. 2001.

[13] M. Rubensson and B. Lennartson, “Stability of Limit Cycles in Hybrid Systems using Discrete-Time a Lyapunov Techniques,” *the American Control Conf.,*

Chicago, US, pp. 210–214, 2000.

[14] M. Rubensson, "Discrete-Time Stability Analysis of Hybrid Systems: A Lyapunov Approach," Ph.D. dissertation, Control and Automation Laboratory Department of Signals and Systems , Chalmers University of Technology Göteborg, Sweden, 2000.

付　　録

1. 定理 1 の証明

ここでの証明は簡単のため，idle time におけるシステムが $\dot{x} = B_{\mathtt{id}}$（すなわち $A_{\mathtt{id}} = \mathbf{0}$）である場合を考えるが，一般に $A_{\mathtt{id}} \neq \mathbf{0}$ である場合でも (6) を考慮することによって同様に証明できる．

（十分性）: 全てのサブシステムにおける滞在時間が $\tau_0^* = \tau_1^* = \cdots = \tau_k^* = \tau^*$ で等しいと仮定する．時刻 $t = 0$ で切り替え平面 S_{i-1} 上にある点 $x_i(0)$ から始まった τ^* 時間後の解 $x_i(\tau^*)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
x_i(\tau^*) &= e^{A_i\tau^*}\Big(x_i(0) + B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}} + A_i^{-1}B_i\Big) - A_i^{-1}B_i \\
&= J^r\Big\{e^{A_{i+1}\tau^*}\Big(J^{k-r}x_i(0) + B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}} + A_{i+1}^{-1}B_{i+1}\Big) \\
&\qquad - A_{i+1}^{-1}B_{i+1}\Big\}
\end{aligned}
$$

ここで，初期値 $x(0)$ から始まった時刻 t（$\geqq 0$）後の解を $x(t)\Big|_{x(0)}$ と表すと，上式は

$$
x_i(\tau^*)\big|_{x_i(0)} = J^r x_{i+1}(\tau^*)\big|_{x_{i+1}(0)=J^{k-r}x_i(0)}
$$

となる．サブシステムの切り替え順は $1 \to 2 \to \cdots \to k \to 1 \to 2 \cdots$ なので，

$$
\begin{aligned}
&x_i(\tau^*)\big|_{x_i(0)} = J^r x_{i+1}(\tau^*)\big|_{x_{i+1}(0)=J^{k-r}x_i(0)} = \cdots \\
&\cdots = J^{kr}x_i(\tau^*)\big|_{x_i(0)=J^{k(k-r)}x_i(0)} = x_i(\tau^*)\big|_{x_i(0)}
\end{aligned}
$$

となり，$x_{i+1}(0) = J^{k-r}x_i(0)$，すなわち $x_i^* = J^{k-r}x_{i-1}^*$ を満足しながら，(3) の解 $(x(t), q(t))$ はリミットサイクル X^* となることが分かる．

（必要性）: $x_i^* \in S_{i-1} \cap X^*$, $x_{i+1}^* \in S_i \cap X^*$ に対して $x_{i+1}^* = J^{k-r}x_i^*$ という関係が満足されているリミットサイクル X^* を仮定する．x_{i+1}^* が次の切り替え平面 S_{i+1} に到達するまでの時間 τ_{i+1}^* は次式を満足する．

$$
\begin{aligned}
C_{i+1}\Big[&e^{A_{i+1}\tau_{i+1}^*}\Big(x_{i+1}^* + B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}} + A_{i+1}^{-1}B_{i+1}\Big) \\
&- A_{i+1}^{-1}B_{i+1}\Big] = d_{i+1} = d
\end{aligned}
$$

ここで，$x_{i+1}^* = J^{k-r}x_i^*$ であることを考慮して上式を変形すると

$$
\begin{aligned}
C_iJ^r\Big[&J^{k-r}e^{A_it}J^r\Big(J^{k-r}\Big(x_i^* + B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}}\Big) + J^{k-r}A_i^{-1}B_i\Big) \\
&- J^{k-r}A_i^{-1}B_i\Big] = d
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow C_i\Big[e^{A_it}\Big(x_i^* + B_{\mathtt{id}}\tau_{\mathtt{id}} + A_i^{-1}B_i\Big) - A_i^{-1}B_i\Big] = d = d_i
$$

となり，τ_{i+1}^* を求めることは τ_i^* を求めることに等しくなる．　□

（平成 x 年 xx 月 xx 日受付）

足立　正和　（学生員）

平 14 阪大・基礎工・システム科学卒．同年同大大学院基礎工学研究科博士前期課程入学，現在に至る．ハイブリッドシステムに関する研究に従事．

山本　　茂

昭 62 阪大・基礎工・制御工学卒．平 1 同大大学院工学研究科博士前期課程了．同年同工学部電子制御機械工学科助手，平 6 同基礎工学部システム工学科助手，平 9 改組により大学院基礎工学研究科助手，平 10 同講師，平 12 同助教授となり，現在に至る．ロバスト制御理論とその応用に関する研究に従事．工学博士．計測自動制御学会，IEEE などの会員．

潮　　俊光　（正員）

昭 55 年神戸大・工・システム卒．昭 60 同大学博士課程修了．現在大阪大学大学院基礎工学研究科教授．離散事象システムの制御，非線形現象の解析などの研究に従事．学術博士．システム制御情報学会，情報処理学会，IEEE などの各会員．